Військовий інститут
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка

Данілов В.Я., Сизов А.І., Чімишенко С.М.

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Частина 1

ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник

Київ – 2019

УДК
ББК
Б

Колектив авторів:

Данілов Володимир Якович – кандидат фізико-математичних наук, професор кафедри фінансового забезпечення військ військового факультету фінансів і права Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Сизов Алім Іванович – кандидат економічних наук, полковник, начальник кафедри фінансового забезпечення військ військового факультету фінансів і права Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

Чімишенко Сергій Миколайович – полковник, заступник начальника кафедри фінансового забезпечення військ військового факультету фінансів і права Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рецензенти:

Бідюк П.І. – доктор технічних наук, професор кафедри математичних методів системного аналізу Національного технічного університету «Київський політехнічний інститут імені Сікорського»;

Марко І.Ю. – провідний науковий співробітник Центрального науково-дослідного інституту Збройних Сил України, доктор економічних наук, професор, Заслужений економіст України;

Ткач І.М. – начальник кафедри економіки та фінансового забезпечення Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, доктор економічних наук, доцент, полковник.

Рекомендовано до друку Вченою радою Військового інституту Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №____ від __________________ 2019 року)

Данілов В.Я., Сизов А.І., Чімишенко С.М.

Б _______ ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ (частина 1) Якісне дослідження економічних процесів за допомогою диференціальних рівнянь. – К.: ВІКНУ, 2019. – 93 с.

Навчальний посібник містить методичні рекомендації для вивчення дисципліни диференціальні рівняння. Він складається з трьох розділів: диференціальні рівняння першого порядку, диференціальні рівняння другого порядку, застосування диференціальних рівнянь в економіці.

Значна увага присвячена розгляду економічних моделей, що описуються диференціальними рівняннями.

УДК
ББК

Передмова

Різноманітні питання математики, економіки, біології, хімії, фізики та інших природничих і суспільних наук приводять до необхідності встановлення залежності між величинами, що описують той чи інший еволюційний процес. В багатьох випадках можна встановити зв'язок між величинами та швидкостями їх зміни відносно інших змінних величин, тобто знайти рівняння, в яких невідомі функції входять під знак похідної. Такі рівняння називаються диференціальними.

Теорія диференціальних рівнянь сьогодні займає провідне місце серед інших математичних дисциплін і має широкі практичні застосування. Вивчення закономірностей суспільних процесів також приводять до побудови економічних математичних моделей, в основі яких лежать диференціальні рівняння.

Мета даного посібника - вивчення елементів диференціальних рівнянь, які необхідні для дослідження основних теоретичних і практичних типів економічних задач, набуття навиків застосування математичного моделювання динамічних задач в економіці та вивчення найбільш поширених економіко – математичних моделей – модель економічного росту Харрода-Домара, неокласична моделі Солоу, встановлення рівноважної ціни на ринку одного товару Самуельсона-Еванса, класична динамічна модель Кейнса, модель інфляції та ін.

Для студентів та курсантів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Зміст

Розділ I. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1. 1 Основні поняття та приклади

Диференціальним рівнянням називається нетотожне співвідношення між незалежною змінною, шуканою функцією та її похідними по незалежній змінній до певного порядку включно.

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить до даного рівняння.

Так рівняння $y' + 9y = 5x^3$ є диференціальним рівнянням перщого порядку, а рівняння $y'' + 3xy = 0$ є диференціальним рівнянням другого порядку.

В загальному вигляді диференціальне рівняння першого порядку записується так:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

а диференціальне рівняння рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{1.2}$$

В співвідношеннях (1.1) та (1.2) F-відомі функції від трьох та n+2 змінних відповідно, які, як правило задовольняють деякі умови неперервності та диференційовності.

Розв'язком диференціального рівняння (1.1) на деякому інтервалі $I = (a, b)$ називається неперервно диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка перетворює його в тотожність на I, тобто

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x)] \equiv 0.$$

Розв'язком диференціального рівняння порядку n (1.2) називається функція $y = \varphi(x)$, яка має на інтервалі I похідні до порядку n включно і для всіх $x \in I$ справджується рівність

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), ..., \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0.$$

Приклад 1. Переконатися, що функції $y_1 = \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $y_2 = \cos x, x \in (0, \infty)$, $y_3 = \cos x, x \in (-\infty, +\infty)$ є розв'язками диференціального рівняння другого порядку $y'' + y = 0$.

Розв\`язування. Дійсно, на кожному із заданих інтервалів

$$y_i = \cos x, \; y_i' = -\sin x, \; y_i'' = -\cos x, \; (\text{ для } i = 1,2,3),$$

тому

$$y_i'' + y_i = -\cos x + \cos x \equiv 0.$$

Відмітимо, що функція $y = \cos x + C$ (де С-довільна стала), також є розв'зком даного рівняння.

Приклад 2. Переконатися, що функція $y = e^{3x}$ є розв'язком диференціального рівняння $y' - 3y = 0$.

Розв`язування. Оскільки, $y' = 3e^{3x}$, то $y' - 3y = 3e^{3x} - 3e^{3x} \equiv 0$. Більше того, функція виду

$$y(x) = Ce^{3x}, \qquad (1.3)$$

де C-довільна стала, також є розв'язком даного рівняння. Нижче буде показано, що співвідношення (1.3) визначає всі розв'язки диференціального рівняння $y' - 3y = 0$, або, як прийнято говорити, задає **загальний розв'язок** рівняння. Відмітимо, що в даному випадку загальний розв'язок залежить від однієї довільної сталої C. Надаючи їй конкретні числові значення, будемо одержувати конкретні розв'язки, або, як говорять, **частинні розв'язки** рівняння.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння $y'' = 5x^2$.

Розв`язування. Здійснюючи безпосереднє інтегрування рівняння $y'' = 5x^2$, одержимо

$$y' = \int 5x^2 dx = \frac{5}{3}x^3 + C_1,$$

та

$$y = \int (\frac{5}{3}x^3 + C_1)dx = \frac{5}{12}x^4 + C_1x + C_2 .$$

Тут C_1, C_2 - довільні сталі. При любих значеннях довільних сталих, очевидно одержана функція буде розв'язком рівняння $y'' = 5x^2$. Іншими словами, функція $y = \frac{5}{12}x^4 + C_1x + C_2$ задає **загальний розв'язок** даного диференціального рівняння другого порядку, яке залежить від двох довільних сталих C_1 та C_2. Надаючи їм конкретних значень, будемо одержувати певні частинні розв'язки.

Наведені вище приклади показують, що:

- диференціальні рівняння мають нескінченну множину розв'язків;
- загальний розв'язок диференціального рівняння залежить від довільних сталих, число яких дорівнює порядку цього диференціального рівняння;
- надаючи конкретні значення цим сталим, одержуемо частинні розв'язки даного диференціального рівняння.

Процес відшукання розв'язків диференціального рівняння називається **розв'язуванням** або **інтегруванням** диференціального рівняння.

Далеко не завжди можна дістати розв'язок рівняння в явному вигляді, тобто у вигляді функції, розв'язаної відносно y. Тому в багатьох випадках задовольняються розв'язком в неявному вигляді.

Функція $\Psi(x, y) = 0$ називається **розв'язком** рівняння (1.1) **в неявній формі,** якщо вона визначає y як неявну функцію x, яка є розв'язком рівняння (1.1). Розв'язок в неявній формі часто називають **інтегралом** рівняння.

1.2 Диференціальні рівняння першого порядку

Іноді рівняння (1.1) можливо подати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1.4}$$

тобто як рівняння, розв'язане відносно похідної.

Нехай функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння (1.4). Графік цієї функції називається **інтегральною кривою** рівняння (1.4). Як відмічалося вище, диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків і для виділення якого-небудь конкретного розв'язку, необхідно вказати додаткову умову. Задача відшукання розв'язку диференціального рівняння (1.4), що задовольняє початковій умові

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.5}$$

називається **задачею Коші*** (тут x_0, y_0- задана точка з області $D \subseteq R^2$ визначення функції $f(x, y)$). Числа x_0, y_0 називають **початковими умовами**. Як правило задача Коші має єдиний розв'язок. Але можливі випадки, коли задача взагалі не має розв'язків або має нескінченну множину розв'язків. Наведемо одну важливу теорему, доведення якої можна знайти в будь-якому підручнику з диференціальних рівнянь.

Теорема Коші. ***(достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку).***

Нехай задана в області D ***функція*** $f(x, y)$ ***неперервна в цій області разом зі своєю похідною*** $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$***. Тоді для кожної точки*** $(x_0, y_0) \in D$ ***задача Коші (1.4)-(1.5) має єдиний розв'язок, визначений в деякому околі точки*** x_0.

Для **існування** розв'язку задачі Коші достатньо вимагати, щоб права частина рівняння (1.4) була неперервна в околі початкових даних.

Точка (x_0, y_0) в якій **порушується єдиність розв'язку** рівняння (1.4), називається **особливою точкою** даного рівняння.

З геометричної точки зору задача Коші полягає в знаходженні інтегральної кривої, що проходить через задану точку (x_0, y_0) області D. На основі теореми Коші уточнимо поняття загального та частинного розв'язків.

Оскільки диференціальне рівняння (1.4) має безліч розв'язків, то часто їх вдається об'єднати в одну формулу. Функцію

$$y = \varphi(x, C), \tag{1.6}$$

де C – довільна стала, називають **загальним розв'язком** рівняння (1.4) в області D зміни аргументів x та y, якщо вона справджує рівняння (1.4) при всіх значеннях довільної сталої C і якщо при відповідному виборі цієї сталої функція (1.6) дає можливість розв'язати будь-яку задачу Коші в області D.

---

* Коші Огюстен Луї (1789-1857) –французький математик

Якщо загальний розв'язок дістають в неявному вигляді

$$\phi(x, y, C) = 0,$$

(1.7)

то його називають **загальним інтегралом** рівняння (1.4).

Розв'язок, який дістають з (1.6) або з (1.7) при конкретному значенні довільної сталої називають відповідно **частинним розв'язком** або **частинним інтегралом.**

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння $y' - \cos x = 0$, що задовільняє початковій умові $y(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Розв`язування. Очевидно всі розв'язки даного рівняння (загальний розв'язок) визначаються співвідношенням $y = \sin x + C$, (C-довільна стала) ($y' = \cos x, dy = \cos x dx, \int dy = \int \cos x dx$) .

Розв'язок, що задовільняє початковим умовам $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y = -1$ буде знайдено при певному значенні C. Для його відшукання потрібно в загальний розв'язок підставити початкові дані:

$$-1 = \sin(\frac{\pi}{2}) + C.$$

Звідси знаходимо, $C = -2$. Таким чином, розв'язком задачі Коші диференціального рівняння $y' - \cos x = 0$ є функція $y = \sin x - 2$.

Покажемо на прикладі утворення диференціального рівняння.

Приклад 5. Знайти диференціальне рівняння однопараметричної сім’ї кривих другого порядку

$$F(x, y, C) \equiv x^2 + Cy^2 - 3 = 0.$$

Розв`язування. Розглядаючи в даному рівнянні y як функцію від x та диференціюючи по x, одержимо:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 2x + 2Cy\frac{dy}{dx} = 0.$$

Знаходячи з умови $x^2 + Cy^2 - 3 = 0$ величину C, $C = \frac{3 - x^2}{y^2}$ і підставляючи в останню рівність, запишемо

$$2x + 2\frac{3 - x^2}{y^2} y\frac{dy}{dx} = 0,$$

або

$$(3 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Таким чином, одержали диференціальне рівняння першого порядку.

Перейдемо до розгляду методів побудови розв’язків деяких класів диференціальних рівняннь першого порядку.

Рівняння (1.4) може бути представлено також у вигляді

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \ . \qquad (1.8)$$

Це так звана **диференціальна форма** рівняння першого порядку. Такою формою зручно користуватись у тих випадках, коли всерівно, яка змінна x чи y є функцією, а яка аргументом.

1.3 Метод відокремлення змінних

Нехай рівняння (1.4) чи (1.8) будь-яким способом вдалося подати в такому вигляді, коли коефіцієнтами при диференціалах змінних є функції, залежні лише від однієї відповідної змінної, тобто

$$F_1(x)dx + F_2(y)dy = 0. \qquad (1.9)$$

Якщо функція $y = \varphi(x)$ є розв'язком рівняння (1.9), то підставивши її в рівняння (1.9) одержимо тотожність

$$F_1(x)dx + F_2[\varphi(x)]\varphi' dx \equiv 0.$$

Оскільки ця тотожність є тотожністю диференціалів (одна частина якої виражена безпосередньо через змінну x, а друга – через її функцію), то їх невизначені інтеграли можуть відрізнятись лише сталим доданком. Отже вираз

$$\int F_1(x)dx + \int F_2(y)dy = C$$

є загальний інтеграл рівняння (1.4) чи (1.8). В теорії диференціальних рівнянь процес зведення рівняння (1.4) чи (1.8) до вигляду (1.9) називається **відокремленням змінних**. Рівняння вигляду (1.9) називається **рівнянням з відокремлюваними змінними.**

1.4 Рівняння з відокремлюваними змінними

Якщо праві частини рівняння 1.4) чи (1.8) можуть бути подані у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \ , \qquad (1\ .10)$$

або

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0, \qquad (1.11)$$

то їх називають рівняннями з **відокремлюваними змінними.** При цьому рівняння (1.10) зводиться до рівняння виду (1.11) діленням обох його частин на функцію $\varphi(y)$ і множенням на диференціал незалежної змінної dx:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx.$$

У рівнянні (1.11) змінні відокремлюються множенням обох його частин на множник $\frac{1}{f_2(x)\varphi_1(y)}$ (звичайно якщо функції $f_2(x), \varphi_1(y)$ відмінні від нуля), тобто

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

Загальні інтеграли одержаних рівнянь з відокремлюваними змінними подаються у вигляді

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + c \ ,$$

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = c \ .$$

Приклад 6. Знайти загальний інтеграл рівняння $xdx + ydy = 0$.

Розв`язування. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, тому інтегруючи його, одержимо.

$$\int xdx + \int ydy = C_1, \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Позначивши $2C_1 = C^2$, одержимо розв'язок $x^2 + y^2 = C^2$.

Інтегральними кривими тут є сім'я концентричних кіл з центром в початку координат .

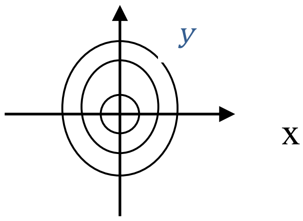


Рис 1.

Приклад 7 . Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0.$$

Розв`язування. Відокремлюючи змінні, знаходимо

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0, \quad \int(\frac{1}{x}+1)dx + \int(\frac{1}{y}-1)dy = c.$$

Загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C, \quad \ln|xy| + x - y = C.$$

Приклад 8. Знайти особливі розв'язки диференціальних рівнянь

$$1).\ y' = x^2e^y, \quad 2).\ y' = \sqrt{y}.$$

Розв`язування. 1). Оскільки права частина $f(x,y) = x^2e^y$ є неперервною функцією в довільній замкнутій області $\overline{D} \subseteq R^2$ і похідна $f'_y(x,y) = x^2e^y$ обмежена в D, то згідно теореми існування та єдиності дане диференціальне рівняння особливого розв'язку не має.

2). Тут $f(x,y)=\sqrt{y}$ є неперервною функцією в довільній замкнутій області, де $y \geq 0$. Але її похідна по змінній y - $f'_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ очевидно стає необмеженою в околі кожної точки прямої $y=0$. Тому дана лінія $y=0$ може бути особливим розв'язком рівняння $y'=\sqrt{y}$. Як легко бачити $y=0$ є розв'язком даного рівняння. Оскільки дане рівняння є рівняння з відокремлюваними змінними, то:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=dx, \quad \text{і} \quad y^{\frac{1}{2}}=\frac{x+C}{2}.$$

З останнього співвідношення одержимо

$$y=\left(\frac{x+C}{2}\right)^2, \text{ причому } x \geq -C.$$

Таким чином, через кожну точку прямої $y=0$ проходить принаймні дві інтегральні криві даного рівняння: лінія $y=0$ та крива із сімейства $y=\left(\frac{x+C}{2}\right)^2$, $x \geq -C$. Отже, $y=0$ є особливим розв'язком диференціального рівняння $y'=\sqrt{y}$

1.5 Однорідні рівняння першого порядку

Функція двох змінних $P(x,y)$ називається однорідною функцією виміру к, якщо для довільного числа $\lambda \neq 0$ має місце тотожність

$$P(\lambda x, \lambda y)=\lambda^k P(x,y).$$

Якщо ж $k=0$, тобто $P(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0 P(x,y)=P(x,y)$, то $P(x,y)$ називається однорідною функцією нульового виміру .

Наприклад, $P(x,y)=6x^2+14xy+2y^2$ є однорідною функцією другого виміру.

Дійсно,

$$P(\lambda x,\lambda y)=6(\lambda x)^2+14(\lambda x)(\lambda y)+2(\lambda y)^2=$$
$$=\lambda^2(6x^2+14xy+2y^2)=\lambda^2 P(x,y).$$

Функція $P(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}$ – однорідна функція нульового виміру.

Дійсно,

$$P(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2-(\lambda x)(\lambda y)+(\lambda y)^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2-xy+y^2}=P(x,y).$$

Якщо функція $f(x,y)$ в правій частині рівняння (1.4) є однорідною нульового виміру, то рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

називається **однорідним** рівнянням першого порядку. Рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1.8)$$

називається однорідним рівнянням першого порядку, якщо функції $M(x,y), N(x,y)$ є однорідними функціями одного і того ж виміру.

Нехай тепер рівняння (1.4) є однорідним рівнянням першого порядку тобто

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$$

Покладемо в останній рівності $\lambda = \frac{1}{x}$, тоді

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}) = f_1(\frac{y}{x}).$$

Зробимо заміну змінної $\frac{y}{x} = u, \quad y = xu$, де $u = u(x)$-нова шукана функція. Оскільки $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u,$ то рівняння (1.4) буде мати вигляд

$$x\frac{du}{dx} + u = f_1(u), \quad x\frac{du}{dx} = f_1(u) - u.$$

З останнього співвідношення випливає , що підстановкою $y = xu$ однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлювальними зміними. Тому розділяючи змінні , одержимо

$$\frac{du}{f_1(u) - u} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{du}{f_1(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Звідси випливає, що загальний інтеграл рівняння можна подати у вигляді $\Phi(x,u,C) = 0$ і перейти до шуканноі функціі y, тобто $\Phi(x, \frac{y}{x}, C) = 0.$

Аналогічно підстановкою $y = xu$ можна одержати і загальний інтеграл рівняння (1.8).

Приклад 9. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$$

та розв’язати задачу Коші: при $x = 1, y = 4$.

Розв`язування. Подамо рівняння у вигляді

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

Оскільки біля диференціалів dx і dy знаходяться однорідні функції другого виміру, то це однорідне рівняння типу (1.8). Зробимо підстановку $y = xu$, тоді dy=xdu+udx і

$$(x^2 + x^2u^2)dx - 2xxu(xdu + udx) = 0 \text{ або } (1-u^2)dx - 2xudu = 0.$$

Розділяючи змінні та інтегруючи, одержимо

$$\frac{dx}{x} = \frac{2udu}{1-u^2}, \quad \int\frac{dx}{x} = 2\int\frac{udu}{1-u^2} + \ln|C|,$$
$$\ln|x| + \ln|1-u^2| = \ln|C|.$$

Звідси маємо,

$$x(1-u^2) = C; \quad x(1-\frac{y^2}{x^2}) = C,$$

або, $x^2 - y^2 = Cx$. Отже $x^2 - y^2 = Cx$ - загальний інтеграл даного рівняння .

Розв'яжемо задачу Коші. Підставивши початкові умови в загальний інтеграл, знайдемо відповідну сталу C : $1^2 - 4^2 = C \cdot 1; \quad 1 - 16 = C; \quad C = -15.$

Таким чином, частинний інтеграл рівняння має вигляд $x^2 - y^2 = -15x$.

1.6 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Серед рівнянь першого порядку особливе місце займають лінійні рівняння (лінійні щодо шуканної функції та її похідної). Записують його так

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{1.12}$$

Рівняння (1.12) містить шукану функцію і її похідну в першому степені, а P(x) і Q(x)- відомі функції

Існує декілька способів інтегрування лінійних рівнянь. Розглянемо **метод Бернуллі***. Шукана функція y(x) в ньому представлена як добуток двох невідомих функцій u(x), v(x), одну з яких можна вибрати довільно.

Отже

$$y = uv, \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}.$$

Одержані співвідношення підставимо в рівняння (1.12). Тоді

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+P(x)v\right]=Q(x)\,. \qquad (1.13)$$

Оскільки одна з функцій u(x) чи v(x) може бути вибрана довільно, знайдемо який-небудь частинний розв'язок рівняння

$$\frac{dv}{dx}+P(x)v=0.$$

---

* Бернуллі Микола (1695-1726) – швейцарський математик

Такий вибір v(x) дозволить одержати для відшукання функції u(x) рівняння з відокремлюваними змінними . Знайдемо функцію v(x).

$$\frac{dv}{v}+P(x)dx=0,\ \int\frac{dv}{v}+\int P(x)dx=C_1.$$

Оскільки відшукується частинний розв'язок рівняння для v(x), то поклавши $C_1=0$, одержимо

$$\int\frac{dv}{v}=-\int P(x)dx\,,$$

а отже

$$\ln v=-\int P(x)dx$$

і

$$v=e^{-\int P(x)dx}\,.$$

При цьому рівняння (1.13) набуде спрощеного вигляду

$$v\frac{du}{dx}=Q(x);\ \frac{du}{dx}=\frac{Q(x)}{v}\,,$$

звідки, відокремлюючи змінні, маємо

$$du=\frac{Q(x)}{V(x)}dx;\ u=\int\frac{Q(x)}{v(x)}dx+C\,.$$

Остаточно загальний розв'язок лінійного рівняння (1.12) запишемо у вигляді

$$y=uv=\left(\int\frac{Q(x)}{V(x)}dx+C\right)\cdot v=$$

$$=\left(\int \frac{Q(x)}{V(x)}dx + C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}. \tag{1.14}$$

Приклад 10. Знайти розв’язок задачі Коші для рівняння

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^3, \quad y(1) = 2.$$

Розв’язування. Згідно метода Бернуллі покладемо y=uv тоді

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Підставимо співвідношення для y і $\frac{dy}{dx}$ в рівнянням, маємо

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}uv = x^3,$$

або

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x}\right) = x^3. \tag{1.15}$$

Виберемо функцію v як розв’язок рівняння

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 0.$$

Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Тому

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{1}{x}dx,$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x}.$$

Звідки $\ln|v| = \ln|x|$ і $v = x$.

Знайдену функцію v підставимо в рівняння (1.15) , одержимо

$$x\frac{du}{dx} = x^3; \quad \frac{du}{dx} = x^2$$

або

$$du = x^2dx; \quad u = \int x^2dx + C = \frac{x^3}{3} + C.$$

Враховуючи вигляд функції y, маємо загальний розв’язок рівняння

$$y = \frac{x^4}{3} + Cx.$$

Оскільки задано початкові умови при x = 1, y = 2, то

$$2 = \frac{1^4}{3} + C \cdot 1.$$

З останнього виразу знаходимо $C = \frac{5}{3}$.

Тоді частинний розв’язок рівняння, який задовольняє початкові умови, має вигляд

$$y = \frac{x^4}{3} + \frac{5}{3}x.$$

Зауважимо, що лінійні рівняння розв’язуються також **методом варіації довільної сталої**, запропонований Лагранжем∗. Розглянемо цей метод на конкретному прикладі.

Приклад 11. Розв’язати лінійне рівняння методом варіації довільної сталої

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^4.$$

Розв’язування. Зінтегруємо спочатку відповідне йому однорідне рівняння

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|, \quad y = Cx^2.$$

Далі, згідно методу варіації довільної сталої, вважаємо C функцією від x. Тому

$$y = C(x)x^2, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}x^2 + C(x)2x.$$

Підставляючи останні співвідношення в неоднорідне рівняння, одержимо:

$$x\left(\frac{dC(x)}{dx}x^2 + C(x)2x\right) - 2C(x)x^2 = 2x^4,$$

звідки $dC(x) = 2xdx$ і $C(x) = x^2 + C_1$. Це дозволяє записати загальний розв'язок даного рівняння

$$y = x^4 + C_1x^2.$$

---

* Лагранж Жозеф Луї (1736 - 1813) – французський математик і механік

1.7 Рівняння Бернуллі

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \neq 0, n \neq 1), \tag{1.16}$$

де функції $P(x), Q(x)$ - задані, називається рівнянням Бернуллі. Помножимо обидві його частини на $(1-n)y^{-n}$, одержимо:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)y^{-n}P(x) = (1-n)Q(x).$$

Заміна

$$y^{1-n} = z, \quad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

приводить його до лінійного рівняння

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Зауваження. Рівняння виду

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + P(x)f(x) = Q(x)$$

заміною

$$f'(y) = z, \quad f'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

зводиться до лінійного

$$\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x).$$

Приклад 12. Знайти загальний розв’язок рівняння Бернуллі

$$y'x+y=-xy^2.$$

Розв’язування. Помноживши обидві частини даного рівняння на $-y^{-2}$, одержимо $-y^{-2}y'x-y^{-1}=x$, або $-\frac{y^1}{y^2}x-\frac{1}{y}=x$.

Далі, покладемо $z=\frac{1}{y}$. Звідки $z'=-\frac{y^1}{y^2}$ і ми приходимо до лінійного рівняння

$$xz'-z=x.$$

Згідно методу Бернуллі, маємо

$$z=uv;\quad z'=u'v+v'u;$$

$$xvu'+u(xv'-v)=x;\quad xv'-v=0;$$

$$x\frac{dv}{dx}=v;\quad \int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln|v|=\ln|x|;\quad v=x.$$

Далі,

$$x^2u'=x;\quad \frac{du}{dx}=\frac{1}{x};$$

$$du=\frac{dx}{x};\quad u=\ln|Cx|.$$

Звідси

$$z=uv=x\ln|cx|.$$

Таким чином, загальний розв’язок даного рівняння Бернуллі матиме вигляд:

$$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{x\ln|cx|}.$$

Завдання 1. Знайти загальні розв’язки диференціальних рівнянь, а також частинні там, де задані початкові умови:

1. $y' = \dfrac{x}{y}$

2. $(x+1)y' + xy = 0$

3. $y' = e^{x+y}$

4. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$

5. $dy = \dfrac{(1+y^2)dy}{1+y}$

6. $y^2y' + x^2 = 1$

7. $y' = \dfrac{1}{2x+y}$

8. $y' = \sin(y - x - 1)$

9. $y' = 3\sqrt[3]{y^2};\ y(2) = 0$

10. $y' = 5\sqrt{y};\ y(0) = 25$

11. $(x+2y)dx - xdy = 0$

12. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

13. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}$

15. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$

16. $y' = \dfrac{3y}{x} + x$

17. $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$

18. $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$

19. $y' = \dfrac{2y}{x+1} + e^x(x+1)^2$

20. $y' + 2y = y^2e^x$

21. $y' = y^4\cos x + y\,\mathrm{tg}x$

22. $xy' - y^2\ln x + y = 0$

23. $x^2(y^3+2)dx + (x^3+2)y^2dy = 0$, $y(0) = 1$

24. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$, $y(\sqrt{3}) = 0$

25. $\mathrm{tg}y\,dx - x\ln y\,dy = 0,\ x(\dfrac{\pi}{2}) = e$

26. $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$, $y(0) = 1$

27. $(y^2+1)dx + (x^2+1)dy = 0$, $y(1) = 2$

28. $2x(1+y^2)dx + (1+x^2)ydy = 0$, $y(1) = 0$

29. $\cos y\dfrac{dy}{dx} + \sin y = x + 1$

30. $y' + y = e^x$

31. $y' - 4y = \cos x$

32. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$

33. $y' + y\,\mathrm{tg}x = \cos^2 x$, $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

34. $y' - 2xy = 1 - 2x^2$, $y(0) = 2$

35. $2y\frac{dx}{dy} + x = 2y^3$

36. $(y^2 + 1)\frac{dx}{dy} + 2xy = 2y^2$

Розділ II. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

2.1.Основні поняття

Загальний вигляд диференціального рівняння другого порядку:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{2.1}$$

де x - незалежна змінна, y – шуканна функція, F-задана неперервна функція своїх аргументів (очевидно, обов'язково залежна від $\mathbf{y''}$)

Якщо це рівняння можна розв'язати відносно другої похідної (припустивши, що виконується умови існування неявної функції), то рівняння (2.1) набуде вигляду

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{2.2}$$

Функцію $y = \varphi(x)$ називають розв'язком рівняння (2.1) (або (2.2)), якщо підставлення $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$ в (2.1) (2.2) замість y, y', y'' перетворює їх в тотожність.

Задача Коші для диференціального рівняння другого порядку (2.2) ставиться так: серед всіх розв'язків рівняння (2.2) знайти такий розв'язок $y = \varphi(x)$, який задовольняє умови

$$y = y_0 \quad y' = y'_0 \text{ при } x = x_0 \;, \tag{2.3}$$

де x_0, y_0, y'_0 наперед задані числа, які називають **початковими умовами.**

Загальним розв'язком рівняння (2.2) є функція

$$y = \varphi(x, C_1, C_2), \tag{2.4}$$

яка залежить від **x** та двох сталих C_1, C_2, якщо вона задовольняє рівняння (2.2) при всіх значеннях цих довільних сталих, і якщо при відповідному виборі довільних сталих з неї можна дістати будь-який частинний розв'язок рівняння (2.2) .

У випадку, коли залежність між x, y та довільними сталими можна подати у вигляді співвідношення, не розв'язаного відносно y:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \tag{2.5}$$

його називають **загальним інтегралом** рівняння (2.2).

Розв'язок, який дістають з (2.4) або (2.5) при конкретних значеннях довільних сталих, називають відповідно **частинним розв'язком, частинним інтегралом**. Так, підставивши в розв'язок (2.4) та його похідну по x початкові умови, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ \varphi'_x(x_0, C_1, C_2) = y'_0 \end{cases},$$

з якої знаходимо $C_1 = C_{10}, C_2 = C_{20}$ і одержуємо частинний розв'язок рівняння (2.2) $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$, що задовольняє початкові умови (2.3)

2.2. Рівняння другого порядку, які дозволяють знизити їх порядок

1. Диференціальні рівняння вигляду

$$y'' = f(x) \ . \tag{2.6}$$

Такі рівняння розв'язуються послідовним дворазовим інтегруванням

$$y' = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y = \int \left[\int f(x)dx + C_1\right]dx + C_2.$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' = -3\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Розв'язування. Послідовно двічі інтегруючи, одержимо розв'язок даного рівняння

$$y' = -3\int \frac{dx}{\cos^2 x} + C_1 = -3\text{tg}x + C_1,$$

$$y = \int(-3\text{tg}x + C_1)dx + C_2 = 3\ln|\cos x| + C_1x + C_2.$$

2. Рівняння вигляду

$$y'' = f(x, y'). \tag{2.7}$$

Дане рівняння не містять явно шуканої функції y. Тому покладемо $y' = p$, де p - деяка нова невідома функція змінної x. Тоді $y'' = p'$ і рівняння (2.7) набуває вигляду

$$p' = f(x, p).$$

Рівняння, яке ми одержали є диференціальним рівнянням **першого порядку** відносно p. Говорять, що порядок вихідного рівняння понизили на одиницю. Далі, нехай його загальний розв'язок буде $p=\varphi(x,c)$. Тоді, враховуючи, заміну $y'=p$, розв'язуємо рівняння

$$y'=\varphi(x,c).$$

Остаточно, загальний розв'язок рівняння $y''=f(x,y')$ отримаємо у вигляді

$$y=\int\varphi(x,C_1)+C_2.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-\frac{x}{y'}=0.$$

Розв'язування. Згідно наведеного вище, покладемо в ньому $y'=p$, $y''=p'$. Таким чином,

$$p'-\frac{x}{p}=0\text{, або }\frac{dp}{dx}-\frac{x}{p}=0,$$

і

$$pdp-xdx=0,\quad \int pdp-\int xdx=\widetilde{C}_1\ ,\quad \frac{p^2}{2}-\frac{x^2}{2}=\widetilde{C}_1,$$

звідки

$$p^2-x^2=C_1,\quad p=\pm\sqrt{x^2+C_1}\ .$$

Далі, згідно заміни, маємо

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{x^2+C_1},\qquad dy=\pm\sqrt{x^2+C_1}dx,$$

або

$$y=\pm\int\sqrt{x^2+C_1}dx+C_2\ .$$

Для обчислення даного інтегралу, застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$y=\pm\int\sqrt{x^2+C_1}dx+C_2=\pm\left|\begin{array}{cc}\sqrt{x^2+C_1}=u & \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+C_1}}=du\\ dx=dv & x=v\end{array}\right|+C_2=$$

$$=\pm(x\sqrt{x^2+C_1}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+C_1}})+C_2=$$

$$=\pm(x\sqrt{x^2+C_1}-\int\frac{(x^2+C_1-C_1)dx}{\sqrt{x^2+C_1}})+C_2=$$

$$=\pm(x\sqrt{x^2+C_1}-\int\sqrt{x^2+C_1}dx+\int\frac{C_1dx}{\sqrt{x^2+C_1}})+C_2\ .$$

Маємо далі

$$\pm 2\int \sqrt{x^2 + C_1}\,dx = = \pm\left(x\sqrt{x^2 + C_1} + C_1 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + C_1}\right|\right) + C_2 .$$

Звідки, остаточно запишемо

$$y = \pm\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + C_1} + \frac{C_1}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + C_1}\right|\right) + \frac{C_2}{2} .$$

3. Рівняння вигляду

$$y'' = f(y, y') \quad . \tag{2.8}$$

Дане рівняння не містять явно аргумент x.

Покладаємо $y' = p$ тоді $y'' = p' = \dfrac{dp}{dx}$ і приймемо **y** за незалежну змінну. Виразимо y'' через функцію p та її похідну по y. Одержимо

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p \quad .$$

Здійснюючи підстановку $y' = p$ і $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ в рівняння (2.9), маємо диференціальне рівняння першого порядку

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) .$$

Припустимо, що загальним розв'язком цього рівняння є функція $p = \varphi(y, C_1)$. Оскільки $p = \dfrac{dy}{dx}$, то знову приходимо до рівняння першого порядку відносно функції y

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1).$$

Відокремлюючи змінні, ми одержуємо загальний інтеграл рівняння (2.9)

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx, \quad x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2 .$$

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$y'^2 + 2yy'' = 0.$$

Розв'язування. Дане рівняння не містить явно аргументу $\mathbf{x}$. Тому покладаючи $y' = p$, звідки $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, маємо рівняння

$$2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0.$$

Поділивши на p (вважаємо що $p \neq 0$) одержимо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$2y\frac{dp}{dy} + p = 0;\ 2\int\frac{dp}{p} + \int\frac{dy}{y} = \ln C^2\ ;\ 2\ln p + \ln y = \ln C^2\ .$$

Далі, потенціюючи, маємо:

$$yp^2 = C^2;\ p = \frac{C_1}{\sqrt{y}};\ \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Звідки $dx = C_1\sqrt{y}dy$ і остаточно, загальний розв'язок рівняння буде:

$$x = \int C_1\sqrt{y}dy = \frac{2}{3}C_1 y^{\frac{3}{2}} + C_2\ .$$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь, а також частинні там, де задані початкові умови:

1. $2xy'y'' = y'^2$
2. $yy'' + 1 = y'^2$
3. $y'' = (y')^2$
4. $y'' = 2(y' - 1)\mathrm{ctg}x$
5. $y'' + y' = 2e^{-y}$
6. $y^4 - y^3 y'' = 1$
7. $y''(2y' + x) = 1$
8. $y'' = 2yy'$
9. $y'' = x + \sin x$
10. $xy'' + y' - x^2 - 1 = 0;$ $x_0 = 1,\quad y_0 = 0,\quad y_0' = 1$
11. $2yy'' - y'^2 = 1;$ $x_0 = 0,\quad y_0 = 0,\quad y_0' = 4$
12. $yy'' - y'^2 - y^2\ln y = 0;$ $x_0 = 0,\quad y_0 = 1,\quad y_0' = 1$
13. $yy' = (y')^2 - (y')^3;$ $x_0 = 1,\quad y_0 = 1,\quad y_0' = -1$
14. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$
15. $\sqrt{1 + x^2}\,y'' = 1$
16. $y'' = \arcsin x$

$17.\ (1-x^2)y'' - xy' = 2$ $\qquad$ $18.\ y'' = y'$

2.3 Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку називається лінійним , якщо воно лінійне відносно шуканої функції та всіх її похідних, які містить це рівняння.

У загальному випадку лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд

$$A_0(x)y''+A_1(x)y'+A_2(x)y = F(x), \tag{2.9}$$

де $A_0(x), A_1(x), A_2(x)$ і $F(x)$ - відомі неперервні функції аргументу x , зокрема, вони можуть бути сталими. При цьому $A_0(x) \neq 0$, а $A_1(x)$ і $A_2(x)$ можуть бути рівними нулю. Враховуючи, що $A_0(x) \neq 0$, рівняння (2.9) записують у вигляді

$$y''+P(x)y'+Q(x)y = f(x). \tag{2.10}$$

Якщо $f(x) \equiv 0$ то рівняння

$$y''+P(x)y'+Q(x)y = 0 \tag{2.11}$$

називають **лінійним однорідним**, а рівняння (2.10) - **лінійним неоднорідним**. Функцію f(x) також називають правою частиною рівняння (2.10).

Означення. Два частинні **розв'язки** $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ рівняння (2.11) називаються **лінійно незалежними** на деякому відрізку [a,b], якщо їх відношення не є сталим на цьому відрізку ,тобто

$$\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const.}$$

Структуру загального розвязку лінійного однорідного рівняння (2.11) справджує теорема.

Теорема 1. ***Якщо*** $y_1 = y_1(x)$ ***і*** $y_2 = y_2(x)$ ***- два лінійно незалежні розв'язки рівняння*** (2.11) ***, а*** C_1 ***і*** C_2 ***- довільні сталі , то функція***

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \tag{2.12}$$

є загальним розв'язком рівняння (2.11).

Доведення даної теореми можна знайти в будь-якому підручнику з диференціальних рівнянь (див. наприклад [6]). Оскільки y_1 і y_2 розв'язки лінійного рівняння (2.11) , то і лінійна комбінація (2.12) буде розв'язком цього рівняння (даний факт легко перевірити безпосередньою підстановкою (2.11) в (2.12)).

Нехай задані початкові умови

$$x = x_0, y = y_0 \text{ і } y' = y'_0 \ , \ x \in [a,b] \ .$$

Покладемо при $x = x_0, y_1 = y_{10}\ , y_2 = y_{20},\ y'_2 = y'_{10}, y'_1 = y'_{10}$.

Тоді для визначення довільних сталих одержимо систему лінійних алгебраїчних рівняннь

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} = y_0, \\ C_1 y'_{10} + C_2 y'_{20} = y'_0. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Відомо, що система (2.13) має єдиний розв'язок, якщо визначник її відмінний від нуля. Ця умова виконується лише для лінійно незалежних розв'язків.

Структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння справджує теорема .

Теорема 2. ***Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння*** (2.10) ***дорівнює сумі загального розв'язку***

$$y_{з.о.} = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

відповідного йому однорідного рівняння (2.11***) і якого-небудь частинного розв'язку цього рівняння*** $y^* = y^*(x)$***, тобто***

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y^* \ . \qquad (2.14)$$

2.4. Лінійні однорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо тепер рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (2.15)$$

де p і q- сталі. Таке рівняння називають лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Воно є частинним випадком лінійного рівняння

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

якщо $P(x) = p, Q(x) = q$.

Згідно з теоремою 1. про структуру загального розв'язку лінійного однорідного рівняння, достатньо знайти два лінійно незалежних частинних розв'язки y_1 і y_2 рівняння (2.15) , щоб побудувати загальний розв'язок

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \ .$$

Для знаходження частинних розв'язків y_1 і y_2. рівняння (2.15) скористаємося методом Л.Ейлера*. Суть цього метода полягає в тому, що частинні розв'язки шукають у вигляді наперед заданої функції

$$y = e^{kx}, \qquad (2.16)$$

де k повино бути таким, що щоб функція (6.2) була розв'язком рівняння (2.15). Для цього знайдемо першу і другу похідні функції (2.16)

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx} \ .$$

Підставимо одержані співвідношення в рівняння (2.15) , тоді

---

* Ейлер Леонард (1707 - 1783) – швейцарський математик, фізик, механік і астроном

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0, e^{kx}(k^2+pk+q)=0.$$

Оскільки $e^{kx}\neq 0$, то з останнього співвідношення одержимо рівняння

$$k^2+pk+q=0\ . \qquad (2.17)$$

Рівняння (2.17) називається **характеристичним рівнянням** рівняння (2.15). Щоб одержати характеристичне рівняння, достатньо замість похідних у рівнянні (2.15) написати відповідні степені k. Розв’язавши рівняння (2.17), знайдемо два значення $k=k_1$ і $k=k_2$ з допомогою яких і будується загальний розв'язок рівняння (2.15).

Очевидно, що при розв'язування характеристичного рівняння (2.17) можливі три випадки .

1. Корені характеристичного рівняння (2.17) **к₁ і к₂ дійсні і різні.**

В даному випадку функції $y_1=e^{k_1x}$ і $y_2=e^{k_2x}$ є лінійно незалежним частинними розв’язками рівняння (2.15). Лінійна незалежність їх слідує з того, що їх відношення $\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{(k_2-k_1)x}\neq \text{const}$, оскільки $k_1\neq k_2$.

Тоді загальний розв’язок рівняння (2.15) має вигляд

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}. \qquad (2.18)$$

Приклад 1.Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''-7y'+10y=0.$$

Розв'язування. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені

$$k^2-7k+10=0;\quad k_1=2, k_2=5.$$

Функції $y_1=e^{2x}$; $y_2=e^{5x}$ є лінійно незалежним частинними розв’язками рівняння .

Загальний розв'язок рівняння, згідно (2.18) буде

$$y\ =C_1e^{2x}+C_2\ e^{5x}.$$

2.Корені характеристичного рівняння (2.17) **к₁ і к₂ дійсні і рівні**

$$k_1=k_2=-\frac{p}{2}.$$

У цьому випадку вибиремо один частинний розв'язок у вигляді $y_1 = e^{k_1 x}$. Якщо таким же вибрати і другий частинний розв'язок y_2, то ці розв'язки будуть лінійно залежні, оскільки $\frac{y_1}{y_2} = 1$. Покажемо, що $y_2 = xe^{k_1 x}$ є розв'язком рівняння (2.15). Дійсно, підставивши y_2 і його похідні $y'_2 = k_1 xe^{k_1 x} + e^{k_1 x}$ та $y''_2 = k_1^2 xe^{k_1 x} + 2k_1 e^{k_1 x}$ в рівняння (2.15), одержимо:

$$e^{k1x}[x(k_1^2 + pk_1 + q) + (2k_1 + p)] \equiv 0.$$

Рівняння (2.15) після підстановки в нього розв'язку $y_2 = xe^{k_1 x}$ та його похідних перетворилось в тотожність, оскільки $k_1^2 + pk_1 + q = 0$ ($к_1$-корінь характеристичного рівняння) і $2k_1 + p = 0$, $(k_1 = k_2 = -\frac{p}{2})$.

Частинні розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = xe^{k_1 x}$ є також лінійно незалежним - $\frac{y_2}{y_1} = x$, $\left(\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const}\right)$.

Таким чином, в даному випадку $(k_1 = k_2 = -\frac{p}{2})$, загальний розв'язок рівняння (2.15) записується у вигляді

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 xe^{k_1 x}. \tag{2.19}$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Розв'язування. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені :

$$k^2 - 8k + 16 = 0; \quad (k-4)^2 = 0; \quad k_1 = k_2 = 4.$$

Тому, частинні розв'язки мають вигляд

$$y_1 = e^{4x}, y_2 = xe^{42x},$$

а отже загальний розв'язок в силу (2.19) запишеться у вигляді

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 xe^{2x}.$$

2. Корені характеристичного рівняння (2.17) $к_1$ і $к_2$ комплексні.

В цьому випадку формула для коренів рівняння (2.17) подається у вигляді

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

В розглянутому випадку дискримінант квадратного рівняння $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Тому $\quad q-\dfrac{p^2}{4}>0.$

Далі позначимо

$$\alpha=-\frac{p}{2};\quad \beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}};\quad \sqrt{-1}=i,\ (\text{i - уявна одиниця}).$$

Тоді

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\sqrt{-1}\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=i\beta\ ,$$

а отже корені характеристичного рівняння (2.15) мають вигляд:

$$k_1=\alpha+i\beta;\quad k_2=\alpha-i\beta.$$

Це так звані комплексно спряжені корені. Використовуючи формули Ейлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$
$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z,$$

частинні розв'язки рівняння (2.17) мають вигляд

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}e^{i\beta x}&=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),\\ e^{\alpha x}e^{-i\beta x}&=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{-i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\beta\sin x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Безпосередньою підстановкою в рівняння (2.15) неважко переконатись, що частинними розв’язками його будуть також дійсні та уявні частини виразів (2.20), які виберемо так:

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

(відмітимо, що ці розв’язки лінійно незалежні, $\dfrac{y_1}{y_2}\neq\text{const}$).

В результаті одержимо загальний розв'язок рівняння (2.15)

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x). \tag{2.21}$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y''+6y'+13y=0,$$

якщо задані початкові умови: при $x=0,\ y=1,\ y'=-1.$

Розв’язування. Складемо відповідне характеристичне рівняння і знайдемо його корені

$$k+6k+13=0,$$

$$k_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-13}=-3\pm\sqrt{-4}=-3\pm\sqrt{-1}\sqrt{4}=-3\pm i2\ .$$

В нашому випадку $\alpha = -3$, $\beta = 2$, а тому загальний розв'язок рівняння згідно (2.21) буде:

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Для побудови частинного розв'язку знайдемо похідну y':

$$y' = e^{-3x}[C_1(-3\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2(-3\sin 2x + 2\cos 2x)].$$

Підставимо в загальний розв'язок рівняння і його похідну початкові умови. Одержимо систему

$$\begin{cases} e^{-3\cdot 0}(C_1 \cos 2\cdot 0 + C_2 \sin 2\cdot 0) = 1, \\ e^{-3\cdot 0}[C_1(-3\cos 2\cdot 0 - 2\sin 2\cdot 0) + C_2(-3\sin 2\cdot 0 + 2\cos 2\cdot 0)] = -1, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ -3C_1 + 2C_2 = -1 \end{cases}.$$

Звідки $C_1 = C_2 = 1$.

Таким чином, частинний розв'язок, що задовільняє початкові умови має вигляд

$$y = e^{-3x}(\cos 2x + \sin 2x).$$

2.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

Вище ми розглянули питання побудови загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (2.15) з сталими коефіцієнтами. Тепер розглянемо способи побудови розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2.22}$$

де p і q – сталі.

Згідно з теоремою 2 про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (2.22) маємо

$$y = y_{з.о} + y^*,$$

де $y_{з.о}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = 0,$$

а y^*-який-небуть частинний розв'язок неоднорідного рівняння (2.22). Зупинемося на процедурі побудови частинного розв'язок рівняння (2.22) y^*.

Позначимо через $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ многочлени степеня

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, \\ Q_n(x) &= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n \;. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Надалі малими будемо позначати відомі коефіцієнти, а великими - невідомі.

Нехай права частина рівняння (2.22) має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{2.24}$$

де $P_n(x)$ - многочлен n-го степеня з відомими коефіцієнтами , а α - дійсне число .

Будемо шукати частинний розв'язок $y*$ неоднорідного рівняння у вигляді

$$y* = e^{\alpha x} Q_n(x). \tag{2.25}$$

Тут $Q_n(x)$ - многочлен n-го степеня з невідомими коефіцієнтами, які потрібно визначити. Якщо (2.25) є розв’язком рівняння (2.22), то підставляючи його в дане рівняння, ми одержимо тотожність .

Знайдемо першу і другу похідні $y*'$ і $y*''$:

$$y*' = e^{\alpha x}[Q'_n(x) + \alpha Q_n(x)],$$

$$y*'' = e^{\alpha x}[Q''_n + 2\alpha Q'_n(x) + \alpha^2 Q_n(x)],$$

і підставимо їх в рівняння

$$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{2.26}$$

маємо

$$e^{\alpha x}[Q''_n + 2\alpha Q'_n + \alpha^2 Q_n] + p[Q'_n + \alpha Q_n]e^{\alpha x} + qe^{\alpha x} Q_n = e^{\alpha x} p_n.$$

Після скорочення на $e^{\alpha x}$, одержимо співвідношення

$$Q''_n + (2\alpha + p)Q'_n + (\alpha^2 + p\alpha + q)Q_n = P_n \quad , \tag{2.27}$$

де Q'_n , Q''_n - перша і друга похідні від многочлена $Q_n(x)$:

$$Q'_n(x) = A_0 n x^{n-1} + A_1(n-1)x^{n-2} + ... + 2A_{n-2}x + A_{n-1},$$

$$Q''_n(x) = A_0 n(n-1)x^{n-2} + A_1(n-1)(n-2)x^{n-3} + ... + 2A_{n-2}.$$

Очевидно вони є многочленами відповідно (n-1)-го і (n-2)-го степеня .

Нехай

$$y'' + py' + qy = 0$$

однорідне рівняння, яке відповідає рівнянню (2.22), а

$$k^2 = pk + q = 0 \tag{2.28}$$

відповідне йому характеристичне рівняння, корені якого $к_1$ і $к_2$. Розглянемо три випадки відносно α в (2.24).

1. $\alpha \neq k_1$ ***і*** $\alpha \neq k_2$***, тобто*** α ***не є коренем характеристичного рівняння*** (2.28). У цьому випадку в обох частинах рівності (2.27) знаходиться многочлен n-го степеня. При цьому коефіцієнти многочлена в лівій частині являють собою лінійні комбінації невідомих коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах (2.27), одержимо систему з $n+1$ лінійних рівняннь для визначення невідомих коефіцієнтів многочлена $Q_n(x)$. Таким чином, частинний розв’язок рівняння (2.26) в даному випадку (2.25) має вигляд (2.25)

$$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x).$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+4y'+4y = x.$$

Розв'язування. Праву частину данного рівняння можна представити як $e^{0x} \cdot x$, тобто $\alpha = 0$. Відповідне йому однорідне рівняння має вигляд

$$y''+4y'+4y = 0.$$

Для знаходження його загального розв'язку, складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені

$$k^2 + 4k + 4 = 0; \quad k_1 = k_2 = -2;$$

$$y_{з.о.} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}.$$

Оскільки, корені характеристичного рівняння не співпадає з $\alpha = 0$, то будемо шукати частичний розвязок y^* у вигляді повного многочлена першого степеня в невідомими коефіцієнтами

$$y^* = Q_1(x) e^{0x} = A_0 x + A_1,$$

а отже $y^*{}' = A_0, \quad y^*{}'' = 0$

Підставимо y^* і його похідні у вихідне неоднорідне рівняння , маємо

$$0 + 4A_0 + 4(A_0 x + A_1) = x$$

$$4A_0 x + 4A_0 + 4A_1 = 1 \cdot x + 0 .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , запишемо систему

$$\begin{cases} 4A_0 = 1, & \text{при} \quad x^1 \\ 4A_0 + 4A_1 = 0, & \text{при} \quad x^0 \end{cases}.$$

Звідки

$$A_0 = \frac{1}{4}, \quad A_1 = -A_0 = -\frac{1}{4}.$$

Тому

$$y^* = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x - 1),$$

а загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = y_{з.о} + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{4}(x - 1).$$

2. $\alpha = k_1$ ***і*** $\alpha \neq k_2$ ***(або*** $\alpha \neq k_1$ ***і*** $\alpha = k_2$ ***), тобто*** α ***співпадає з одним коренем характеристичного рівняння*** (2.28).

Тоді в лівій частині рівності (2.27) коефіцієнт при Q_n дорівнює нулю (він являє собою характеристичне рівняння). Тому в рівності (2.27) зліва буде многочлен (n-1) - го степеня , а справа - n - го степеня. А отже, ні при яких $A_0, A_1, ..., A_n$ рівність (2.27) не була б тотожністю. Виходячи з цього , частичний розв'язок рівняння y^* знаходять у вигляді многочлена (n-1) - го степеня без вільного члена

$$y^* = x Q_n(x) e^{\alpha x} . \tag{2.29}$$

Приклад 2 .Знайти загальний розвязок рівняння

$$y''-7y'+6y=(x-2)e^x.$$

Розв'язування. Запишемо відповідне однорідне рівняння і знайдемо його загальний розв'язок:

$$y''-7y+6y=0;\quad k^2-7k+6=0;\quad k_1=1, k_2=6;$$
$$y_{з.о.}=C_1e^x+C_1e^{6x}.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок y* . В нашому випадку $\alpha=1$ і співпадає з одним коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв’язок y* будемо шукати у вигляді (2.29) :

$$y^*=x\,Q_1(x)e^x=x(A_0x+A_1)e^x,$$
$$y^{*\prime}=\left[A_0x^2+(2A_0+A_1)x+A_1\right]e^x,$$
$$y^{*\prime\prime}=\left[A_0x^2+(4A_0+A_1)x+2A_0+2A_1\right]e^x.$$

Підставимо вирази для y*, y*’ і y*’’ в дане рівняння. Одержимо

$$(-10A_0+2A_0-5A_1)e^x=(x-2)e^x,$$

або

$$-10A_0x+2A_0-5A_1=x-2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases}-10A_0=1,\\ 2A_0-5A_1=-2,\end{cases}$$

звідки $A_0=-\dfrac{1}{10},\ A_1=\dfrac{9}{25}.$

Отже, частинний розв’язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y^*=\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x.$$

Загальний розв'язок рівняння є

$$y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\left(-\frac{1}{10}x+\frac{9}{25}\right)e^x.$$

3. $\alpha=k_1=k_2$***, тобто*** α ***є двократним коренем характеристичного рівняння*** (2.28). Тоді в лівій частині рівності (2.27) коефіцієнти при Q_n і Q_n' дорівнюють нулю

$$\alpha^2+p\alpha+q=0;\quad 2\alpha+p=0,\quad (\alpha=k_1=k_2=-\frac{p}{2}).$$

Тому в лівій частині рівності (2.27) буде многочлен (n-2)-го степня, а в правій - n- го. Виходячи з цього, частинний розв'язок рівняння слід шукати у вигляді

$$y^* = x^2 Q_n(x) e^{\alpha x}. \quad (2.30)$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}.$$

Розв'язування. Запишемо відповідне однорідне рівняння і знайдемо його загальний розв'язок:

$$y'' - 4y' + 4y = 0; \quad k^2 - 4k + 4 = 0; \quad k_1 = k_2 = 2;$$

$$y_{з.о.} = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}; \; \alpha = k_1 = k_2 = 2.$$

Таким чином, частинний розв'язок y* має вигляд:

$$y^* = x^2 Q_0(x) e^{2x} = x^2 A_0 e^{2x}.$$

Тому

$$y^{*\prime} = A_0 e^{2x}(2x^2 + 2x),$$

$$y^{*\prime\prime} = 2A_0 e^{2x}(2x^2 + 4x + 1).$$

Далі підставивши y*, y*' та y*'' в рівняння , одержимо

$$A_0 e^{2x}(4x^2 + 8x + 2) - A_0 e^{2x}(8x + 8x^2) + A_0 e^{2x} \cdot 4x^2 = e^{2x},$$

або

$$A_0(4x^2 + 8x + 2 - 8x^2 + 4x^2) = 1.$$

Звідки,

$$2A_0 = 1; \; A_0 = \frac{1}{2},$$

а отже

$$y^* = \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Розглянемо ще один важливий вападок, коли права частина рівняння (2.22) має вигляд

$$f(x) = e^{rx}(a\cos sx + b\sin sx), \quad (2.31)$$

де a, b, c, r , s - задані числа. Тут можливі два випадки:

1. ***комплексне число r+is не є коренем характеристичного рівняння***

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тоді частинний розв'язок розшукують у вигляді

$$y^* = e^{rx}(A\cos sx + B\sin sx), \quad (2.32)$$

де A і B - невідомі коефіцієнти, які потрібно визначити.

2. ***комплексне число r+is є коренем характеристичного рівняння.***

У цьому випадку частинний розв'язок має вигляд

$$y^* = x e^{rx}(A\cos sx + B\sin sx). \quad (2.33)$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''+4y=\cos 2x.$$

Розв'язування. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y''+4y=0.$$

Складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені

$$k^2+4=0;\, k^2=-4;\, k_{1,2}=\pm\sqrt{-4};$$

$$k_{1,2}=\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}=\pm i\cdot 2.$$

Рівняння має чисто уявні корені

$$\alpha\pm i\beta=0\pm i\cdot 2=\pm i2;\alpha=0;\beta=2,$$

тому загальний розв'язок однорідного рівняння -

$$y_{з.о.}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

У правій частині неоднорідного рівняння

$$r=0, s=2,\ a=1;\ b=0.$$

Число $r+is=0+i2=i2$ співпадає з коренем характеристичного рівняння $\alpha+i\beta=0+=i2$. Тому, частинний розв'язок y* шукаємо у вигляді (2.33).

$$y^*=x\,(A\cos 2x+B\sin 2x).$$

Обчислимо похідні

$$y^{*\prime}=A(\cos 2x-2x\sin 2x)+B(\sin 2x+2x\cos 2x),$$

$$y^{*\prime\prime}=A(-4\sin 2x-4x\cos 2x)+B(4\cos 2x-4x\sin 2x).$$

Далі підставивши y^*, $y^{*\prime}$ та $y^{*\prime\prime}$ в рівняння , одержимо

$$A(-4\sin 2x-4x\cos 2x)+B(4coc2x-4x\sin 2x)+4Ax\cos 2x+4Bx\sin 2x=\cos 2x,$$

або

$$-4A\sin 2x+4B\cos 2x=1\cdot\cos 2x+0\cdot\sin 2x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$ в лівій і правій частинах останнього співвідношення

$$-4A=0;\quad 4B=1;\quad A=0;\quad B=\frac{1}{4}.$$

Таким чином, частинний розв'язок y* є

$$y^*=\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння -

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x\sin 2x.$$

Зауваження 1. Навіть тоді, коли в правій частині рівняння (2.22) присутня лише одна з тригонометричних функцій, форма частинного розв'язку (2.32) або (2.33) задається в повному вигляді.

Зауваження 2. Якщо права частина рівнняння (2.22) має вигляд, відмінний від розглянутих вище, то на практиці використовують метод варіації довільних сталих (див. наприклад [6]).

Завдання 3. Знайти загальні розв’язки рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами, а також частинні там, де задані початкові умови.

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 4y = 0$
4. $y'' - y = 0$
5. $y'' - 10y' + 25y = 0$
6. $y'' - 8y = 0$
7. $y'' + 8y' + 16y = 0$
8. $y'' + 2y' + 10y = 0$
9. $y'' - 4y' + 3y = 0$
10. $y'' - 8y' + 7y = 0$
11. $y'' - 4y' + 4y = 0$
12. $y'' + y = 0$
13. $y'' + \omega^2 y = 0$
14. $y'' - 2y' + 4y = 0$
15. $y'' - 8y' + 7y = 3x^2 + 7x + 8$
16. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
17. $y'' - 2y' + 10y = x\cos 2x$
18. $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
19. $4y'' - y' + y = 0,$ $y(0) = 3,\ y'(0) = -1$
20. $y'' + 6y' + 9y = 0,$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
21. $y'' + 4y' + 3y = 0,$ $y(0) = -1, \quad y'(0) = 4$
22. $y'' - 2y' = 0,$ $y(0) = 0,\ y'(0) = -3$
23. $2y'' + y' - y = 0,$ $y(0) = 3,\ y'(0) = 1$
24. $y'' - 2y' + y = 0,$ $y(0) = 0, \quad y'(0) = 2\sqrt{3}$

Розділ III. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЕКОНОМІЦІ

Для більш повного засвоєння застосування елементів диференціальних рівнянь розглянемо деякі динамічні математичні моделі з різних галузей економіки, військової тематики та суспільного життя. Диференціальні рівняння одержують на основі законів економічного і соціального розвитку та балансових співвідношень. При побудові динамічних математичних моделей спочатку виводимо відповідне диференціальне рівняння; якщо можливо, проводимо його якісний аналіз (досліджуємо на стаціонарність, єдиність та існування розв'язків, їх зростання, спадання, опуклість, наявність точок перегину і т.п.); знаходимо розв'язки та досліджуємо їх при тих значеннях параметрів, які надають моделі економічного смислу. Якщо не вдається знайти аналітичний розв'язок, тоді використовуємо персональний компьютер та знаходимо наближені розв'язки.

3.1 Найпростіша динамічна модель демографічного процесу. Закон зміни чисельності населення

Задача 1. Із статистики відомо, що для певного регіону число новонароджених і число померлих в одиницю часу t пропорційні чисельності населення $y(t)$ з коефіцієнтами пропорційності k_1 та k_2 відповідно. Знайти закон зміни чисельності населення $y(t)$, як функцію часу, враховуючи, що швидкість зміни населення пропорційна його чисельності, а початкова величина населення $y(t_0) = y_0$. Описати демографічний процес при різних значеннях параметрів k_1 та k_2 (t в роках).

Розв'язування. Спочатку виведемо відповідне диференціальне рівняння. Нехай $y(t)$ - число жителів деякої країни в момент часу t. Тоді приріст числа жителів за час Δt, з врахуванням народжуванності та смертності буде

$$\Delta y = k_1 \cdot y \cdot \Delta t - k_2 y \cdot \Delta t = (k_1 - k_2) y \cdot \Delta t \quad . \tag{3.1}$$

Звідси враховуючи, що $\frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$ при $\Delta t \to 0$, легко отримуємо рівняння зміни чисельності населення

$$\frac{dy}{dt} = (k_1 - k_2) y \quad . \tag{3.2}$$

Оскільки в момент часу $t = t_0$ величина чисельності населення відома, тобто $y(t_0) = y_0$, то разом з (3.2) одержимо таку задачу Коші: знайти розв'язок диференціального рівняння (3.2) при умові

$$y(t_0) = y_0 . \tag{3.3}$$

Припустимо, що параметри k_1 та k_2 є сталими, тоді розв'язком диференціального рівняння (3.2) зі змінними які розділяються є функція

$$y(t) = y_0 e^{(k_1 - k_2)(t - t_0)} . \tag{3.4}$$

Таким чином зростання (спадання) чисельності населення відбувається за експоненціальним законом (3.4). При $k_1 - k_2 > 0$ чисельність населення зростає, а при $k_1 - k_2 < 0$- спадає.

3.2 Задача зростання інвестицій

Задача 2. Відомо, що швидкість зростання інвестованого капіталу в момент часу t пропорційна величині капіталу $I(t)$ з коефіцієнтом пропорційності k.

Записати, та розв'язати задачу Коші, яка описує зростання інвестицій коли в момент $t = t_0 = 0$, відомі початкові інвестиції I_0.

Розв'язування. Виведемо диференціальне рівняння. Позначимо через $I(t)$ - величину інвестованого капіталу в момент часу t, а через $\frac{dI}{dt} = I'(t)$ - швидкість зміни величини інвестиції. Економістами встановлено, що швидкість зростання інвестованого капіталу в момент часу t пропорційна величині капіталу з коефіцієнтом пропорційності k рівним узгодженому відсотку неперервного зростання капіталу $I(t)$ (закон акселерації $\frac{dI}{dt} = k \cdot I(t)$; величина $\frac{1}{k}$- називається нормою акселерації).

Вважаємо, що при $t = 0$ початкова інвестиція задається постійною величиною I_0. Тоді за умовою задачі маємо:

$$\frac{dI(t)}{dt} = kI(t)\ , \tag{3.5}$$

$$I(0)_{t=0} = I_0\ . \tag{3.6}$$

Таким чином одержали задачу Коші (3.5)-(3.6) для диференціального рівняння першого порядку .

Загальним розв`язком рівняння (3.5) при постійному k є функція

$$I(t) = e^{kt}C\ , \tag{3.7}$$

де C – довільна стала.

Оскільки при $t = 0 \quad I(0) = I_0$, то з рівності (3.7) одержимо $I_0 = e^{k \cdot 0} \cdot C$, або $C = I_0$. Підставляючи значення $C = I_0$ в функцію (3.7), знайдемо розв`язок задачі Коші (3.5) - (3.6):

$$I(t) = I_0 e^{kt}. \tag{3.8}$$

3.3 Модель природного росту випуску продукції

Задача 3. Відомо, що кількість x виробленої продукції є функція часу, тобто $x = x(t)$. Знайти кількість виробленої продукції за деякий час, якщо вся вироблена продукція реалізується по заданій ціні p, а швидкість зміни її випуску пропорційна інвестиціям $I(t)$, з нормою акселерації $\frac{1}{e}$, при умові, що сама величина інвестицій $I(t)$ пропорційна доходу від реалізації з нормою інвестиції $m \quad (0 < m < 1)$. Крім того при $t = t_0$, $x(t_0) = x_0$.

Розв'язування. Одержимо диференціальне рівняння. Нехай $x(t)$ - кількість продукції, що реалізована на момент часу t по ціні p. Тоді доход буде рівним $p \cdot x(t)$. Частину доходу, яка використовується як інвестиції в виробництво вказаної продукції знаходимо через норму інвестиції

$$I(t) = m \cdot p \cdot x(t), \quad (0 < m < 1). \tag{3.9}$$

Якщо допустити, що ринок не насичується і продукція, яка виробляється, повністю реалізується, то, як і в попередній задачі, приріст доходу буде витрачатись на розширення випуску продукції. Тобто швидкість випуску буде пропорційна інвестиціям

$$x'(t) = e \cdot I(t), \tag{3.10}$$

де - 1/е - норма акселерації (той же закон акселератора). Із співвідношень (3.9) та (3.10) одержимо

$$x'(t) = kx(t), \; (k = emp). \tag{3.11}$$

Розв`язком цього рівняння знову буде функція

$$x(t) = Ce^{kt} \; . \tag{3.12}$$

Оскільки при $t = t_0$ об`єм випуску x_0 зафіксований, то із (3.12) одержимо $x_0 = Ce^{kt_0}$, звідки $C = x_0 e^{-kt_0}$

Таким чином кількість продукції реалізованої в момент t також є експоненціальна функція

$$x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)} \; . \tag{3.13}$$

Рівновагою будемо називати такий стан економічного об`єкту системи, який вона зберігає при відсутності зовнішніх збурень. Задача економічної динаміки включає в себе як процеси виходу в стан рівноваги, так і процеси трансформації цього стану під впливом зовнішніх сил.

Розглянемо задачу, що стосується аналізу рівноважного стану найпростішої економічної системи.

3.4 Найпростіша модель динамічної рівноваги в економіці

Задача 4. Відомо, що економічна система описується одним показником $x(t)$, швидкість зміни якого $x'(t)$ пропорційна його відхиленню від рівноважного значення $x_{ст}$. Записати та розв'язати диференціальне рівняння, яке описує динаміку зміни показника $x(t)$, якщо $x(0) = x_0$.

Розв'язування. Одержимо диференціальне рівняння. Для цього позначимо через $x(t)$ той показник, який описує поведінку найпростішої економічної системи, а через $x_{ст.}$ - рівноважний стан системи (стан рівноваги).

Оскільки швидкість зміни $x(t)$ пропорційна відхиленню від стану рівноваги $x_{ст.}$, то з умови задачі одержимо диференціальне рівняння:

$$x'(t) = k(x(t) - x_{ст}), \quad (k - \text{const}) \ . \qquad (3.14)$$

В момент часу $t = 0$, величина $x(t)$ дорівнює:

$$x(t)|_{t=0} = x_0 \ . \qquad (3.15)$$

Неважко перевірити, що розв`язком задачі Коші (3.14) - (3.15) буде функція часу t

$$x(t) = x_{ст} + (x_0 - x_{ст})e^{kt} \ . \qquad (3.16)$$

Проведемо аналіз розв'язку (3.16).

Якщо $k < 0$, то $e^{kt} \to 0$ при $t \to \infty$ і рівновага $x_{ст.}$ стійка, тобто $x(t) \to x_{ст}$ при $t \to \infty$. Таким чином при відхиленні величини $x(t)$ від $x_{ст.}$ система знову прагне до стану рівноваги $x_{ст.}$. На рис.2 а) схематично зображена поведінка траєкторії $x(t)$ економічної системи при початкових даних $x_1(0) > x_{ст.}$ та $x_2(0) < x_{ст.}$.

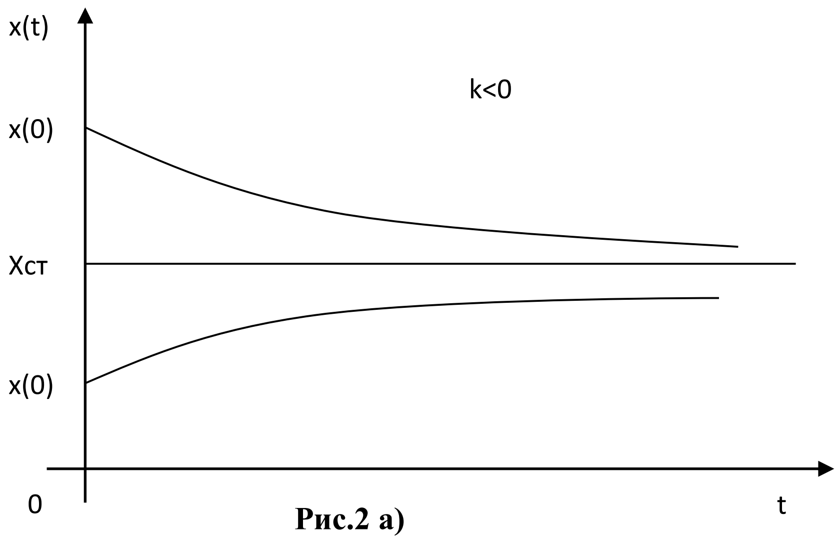
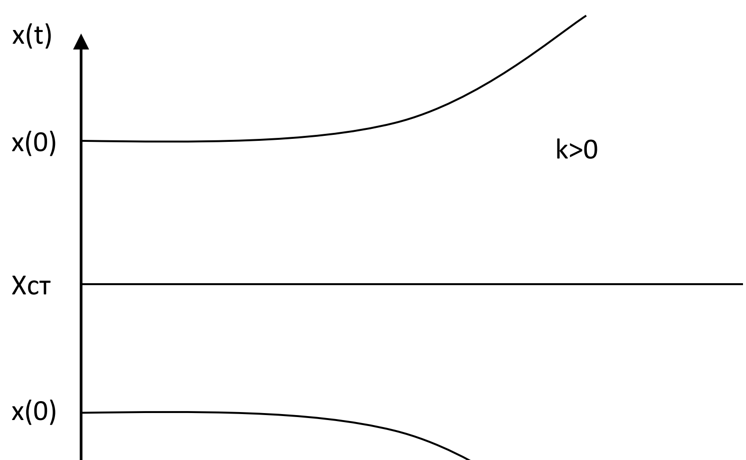


Рис.2 а)

Якщо $k > 0$, то $e^{kt} \to \infty$ при $t \to \infty$. Тоді: $x(t) \to \infty$ при $x_0 > x_{ст}$ і $x(t) \to -\infty$ при $x_0 < x_{ст}$. Таким чином, в цьому випадку траєкторія (3.16) системи (3.14) прямує до нескінченності з ростом часу t, а значить при $x_0 \neq x_{ст.}$ система виходить із стану рівноваги (рис. 2 б). Зрозуміло, що розв'язок має економічний сенс лише при $t < t_1$.



t_1 t

Рис.2 б)

3.5 Диференціальне рівняння росту продукції з заданим темпом

Задача 5. Написати диференціальне рівняння, відносно функції $y(t)$, яка описує зростання рівня виробництва продукції в момент часу t (t вимірюється в роках), якщо темп росту випуску продукції T задане число ($T > 0$). Знайти його розв'язок та сумарну кількість устаткування виробленого за проміжок часу від t_0 до t_1. Якщо в базовому році $t = t_0$ рівень виробництва відомий $y(t_0) = y_0$. Зробити розрахунок при $T = 0.05$ (темп росту 5%- річних) та при $t_0 = 0, t_1 = 10$ років.

Розв'язування. Виведемо диференціальне рівняння. Позначимо через $y(t)$ рівень виробництва продукції за одиницю часу в момент t (t- в роках). Оскільки темп росту випуску продукції T, то за означенням $T \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{1}{y}$; звідки

$T = \frac{y'}{y}$ при $\Delta t \to 0$.

З останнього співвідношення одержимо шукане диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = yT .$$

Оскільки в базовому році $t = t_0$ рівень виробництва y_0, величина задана, тобто $y(t_0) = y_0$, то знову одержимо відому нам задачу Коші: знайти розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dt} = yT, \quad (t_0 \le t \le t_1) \tag{3.17}$$

при початкових умовах

$$y(t_0) = y_0 . \tag{3.18}$$

Оскільки диференціальне рівняння (3.17) при постійному T є рівнянням із змінними, що розділяються, то розв'язком задачі Коші (3.17) - (3.18) є функція

$$y(t) = y_0 e^{T(t-t_0)}.$$

Сумарна кількість устаткування випущенного фірмою за час $t \in [t_0, t_1]$ буде визначатися інтегралом

$$Y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} y_0 e^{T(t-t_0)}dt = \frac{1}{T} y_0 (e^{T(t_1-t_0)} - 1). \qquad (3.19)$$

Таким чином формула (3.19) і служить для визначення сумарної кількості устаткування якщо відомий темп росту випуску. Використаємо її враховуючи умови задачі. Оскільки за умово задачі при $T = 0.05,\ t_0 = 0,\ \ t_1 = 10$ то із формули (3.19) знайдемо кількість устаткування, випущеного фірмою за 10 років

$$Y(10) = 20 y_0 (e^{0.5} - 1).$$

Обчислюючи за таблицями $e^{0.5} \approx 1.6487$ одержимо $Y(10) \approx 13 y_0$.

3.6 Задача визначення функції попиту за заданою еластичністю попиту

Задача 6. Нехай еластичність попиту кількості товару x по ціні p за кожну одиницю товару $E_p(x)$ відома тобто: $E_p(x) = b$. Знаючи, що еластичність визначається за формулою $E_p(x) = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$, знайти функцію попиту на цей товар при умові: $p = 1, x = 4$. Дослідити знайдений розв'язок при різних значеннях параметра b, $\ (b > 0; b < 0)$.

Розв'язування. За умовою задачі можемо записати таке диференціальне рівняння для функції попиту $x(t)$

$$\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp} = b.$$

Розділяючи в цьому рівнянні змінні, одержимо

$$\frac{dx}{x} = b\frac{dp}{p};$$

звідки знайдемо $\quad \ln x(p) = b \ln p + C$,

або

$$x(p) = e^C \cdot p^b = C_1 \cdot p^b, \text{ де } C_1 = e^C.$$

Оскільки $x(1) = 4$, то $\ln 4 = b \ln 1 + C$, $C = \ln 4$, або $C_1 = e^{\ln C} = C$. Отже, функція попиту остаточно набуде вигляду

$$x(p) = C_1 \cdot p^b \qquad \text{або} \qquad x(p) = 4 \cdot p^b. \qquad (3.20)$$

Проведемо якісний аналіз розв'язку (3.20).

Диференціюючи розв'язок (3.20), знайдемо, що $x'(p) = 4b \cdot p^{b-1}$; тому при $b > 0$ попит буде зростаючою функцією ($x'(p) > 0$), а при $b < 0$- спадною ($x'(p) < 0$). Диференціюючи (3.20) ще раз, знайдемо

$$x''(p) = 4 \cdot b \cdot (b-1)p^{b-2},$$

звідки: $x''(p)$ буде більша нуля, при $b > 1$; тобто функція $x(p)$ опукла вниз при $b > 1$, а при $0 < b < 1$ -опукла вгору.

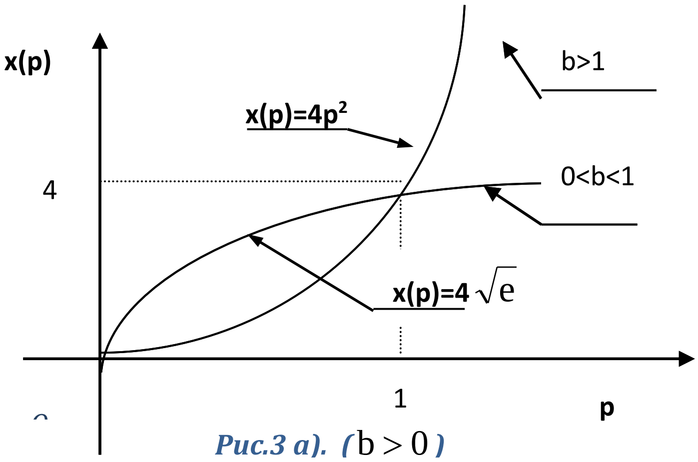


Рис.3 а). ($b > 0$)

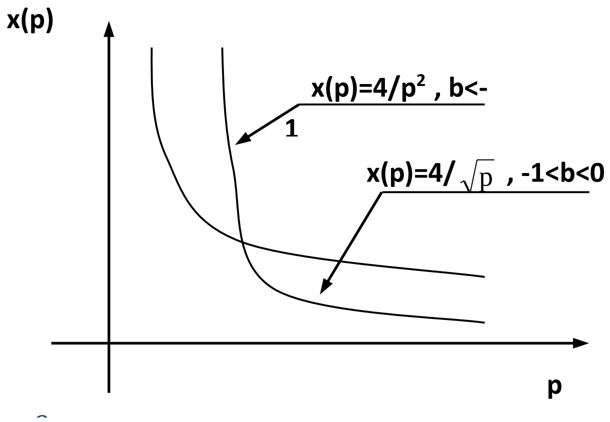


Рис.3 б). ($b < 0$)

При $b > 1$ ***попит еластичний*** і економісти кажуть, спостерігається ***активний економічний ріст,*** а при $0 < b < 1$- ***попит не еластичний***, характер росту змінюється - він сповільнюється.

При $b < 0$, функція $x(p)$ буде завжди спадати і опукла вниз, тому, що $x' < 0$, а $x'' > 0$. Ескіз графіка $x(p)$ для вказаних значеннях параметру b зображено на Рис. 3 а) та Рис. 3 б).

Зауважимо, що сімейство гіпербол типу (3.20) ми використовували для моделювання попиту і пропозиції при різних b.

Розглянемо тепер більш природний випадок, наприклад коли існує монополія і ринок може насичуватись товаром. Тоді ціна є функцією від кількості товару, тобто $p = p(x(t))$.

При цьому будемо також вважати, що інвестиції формуються як частка від доходу фірми.

3.7 Зростання випуску продукції в умовах конкуренції

Задача 7. Відомо, (див. задачу 3) що функція росту продукції $x(t)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$x'(t) = \alpha p(x) \cdot x, \qquad (3.21)$$

де - $\alpha = e \cdot m, m$ - норма інвестиції, $\frac{1}{e}$ - норма акселерації, $p(x)$ - ціна товару.

Розв'язати дане диференціальне рівняння при умові, що ціна лінійно залежить від кількості продукції (товару): тобто $p(x) = a - bx$, де $a > 0, b > 0$. Проаналізувати розв'язок та побудувати його графік, якщо $x(0) = x_0$.

Розв'язування. 1. Цей приклад є фактично продовженням задачі 3 при умові, що ціна є функцією кількості товару як це дійсно і є в макроекономіці. На відміну від моделі п.3.3 будемо вважати, що ринок може насичуватись. При цьому з умови задачі випливає, що ціна p є спадна функція від x, тобто $p = p(x)$ і тоді $\frac{dp}{dx} < 0$ (з ростом кількості товару ціна зменшується).

Нелінійне диференціальне рівняння (3.21) одержуємо аналогічно рівнянню в задачі 3. Воно є рівнянням першого порядку відносно x із змінними, які розділяються:

$$x' = \alpha \ p(x)x, \quad \alpha = l \cdot m, \quad l = \frac{1}{e}. \qquad (3.22)$$

Дійсно з (3.22) випливає, що

$$\frac{dx}{x \cdot p(x)} = \alpha \cdot dt, \quad \int \frac{dx}{x \ p(x)} = \int \alpha \ dt + C.$$

Зрозуміло, що ліву частину можемо проінтегрувати лише знаючи вид функції $p(x)$.

2. Спочатку встановимо якісну картину виробництва. Для цього проведемо якісний аналіз розв`язку нелінійного рівняння (3.22), а саме дослідимо його розв’язок на опуклість (не розв'язуючи самого рівняння). Для цього продиференціюємо рівняння (3.22) по часу t. Тоді, враховуючи, що $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, одержимо:

$$x'' = \alpha(x'p(x) + x\frac{dp}{dx}x'); \quad x'' = \alpha \cdot x'(p + \frac{dp}{dx}x).$$

Останнє співвідношення легко переписати враховуючи еластичність попиту $E(p) = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x}$, тоді $x'' = \alpha \, x' p = (1 + \frac{dp}{dx} \cdot \frac{x}{p})$. Оскільки $\frac{dp}{dx}$<0, то і $\frac{dx}{dp}$<0, і значить $E(p) < 0$. Таким чином другу похідну можемо записати у вигляді:

$$x'' = \alpha x' p \cdot (1 - \frac{1}{|E|}) \ . \qquad (3.23)$$

Тепер можна провести аналіз розв'язку рівняння (3.22) з допомогою співідношення (3.23). Оскільки справа в (3.22) всі функції більші нуля, тому $x' > 0$ і функція $x(t)$ зростаюча при $t > 0$.

Якщо попит $E(p)$ еластичний, то $|E| > 1$, і із (3.23) випливає, що $1 - \frac{1}{|E|} > 0$, а отже і $\mathbf{x'' > 0}$. Останнє і означає опуклість зростаючої функції $x(t)$ вниз. Таким чином **виробництво продукції зростає прогресивно**.

Якщо $|E| < 1$, тоді $(1 - \frac{1}{|E|}) < 0$ і $\mathbf{x'' < 0}$, тобто x опукла вгору, що разом з зростанням x $x' > 0$ означає **сповільнений ріст (насичення) виробництва продукції**.

При $|E| = 1$одержимо, що $\mathbf{x'' = 0}$, а отже в тій точці t_0, де $|E| = 1$маємо точку перегину функції $\mathbf{x = x(t)}$ (див. Рис.4).

В загальному випадку при заданій функції $p(x)$ розв'язок рівняння (3.22) можна знайти лише наближено з допомогою так званих чисельних методів.

Ми ж розглянемо лише один з найпростіших випадків аналітичного задання функції $p = p(x)$, коли рівняння (3.23) інтегрується, а саме випадок 3.

3. Виберемо найбільш вживаний у мікроекономі випадок лінійної залежності між p та x. Отже $p(x) = a - bx, \quad a > 0, \quad b > 0$. Тоді рівняння (3.22) набуде виду

$$x' = \alpha (a - bx) x \ . \qquad (3.24)$$

Для початку проведемо якісний аналіз розв’язку рівняння (3.24). Продиференціювавши ліву та праву частини рівняння (3.24) одержимо

$$x'' = \alpha x'(a - 2bx) \, . \qquad (3.25)$$

Із рівняння (3.24) та (3.25) легко отримуємо, що:

A. $x' = 0$ при $x = 0$ та $x = \frac{a}{b}$ і $x' > 0$ при $0 < x < \frac{a}{b}$. Отже функція $x(t)$ зростає при $t > 0$ і $x < \frac{a}{b}$.

Б. Із (3.25) випливає, що $x''>0$ при $x<\frac{a}{2b}$; $\mathbf{x''<0}$ при $x>\frac{a}{2b}$; $\mathbf{x''=0}$ при $x=\frac{a}{2b}$. Отже, функція $x(t)$ при $x<\frac{a}{2b}$ опукла вниз, а при $x>\frac{a}{2b}$ опукла вгору, а точка $x=\frac{a}{2b}$ є точкою перегину графіка функції $x=x(t)$.

В. При $x>\frac{a}{b}$, $x'<0$ і $x''<0$, отже функція $x(t)$ спадає і опукла вниз.

Рівняння (3.24) є рівняння Бернуллі. Домножимо обидві частини його на $\mathbf{(-x^{-2})}$ і зробимо заміну $z=\frac{1}{x}$. Враховуючи, що $\frac{dz}{dx}=-x^{-2}x'$ із (3.24) одержимо лінійне рівняння першого порядку

$$\frac{dz}{dt}+\alpha\cdot a\cdot z=\alpha\cdot b\ . \tag{3.26}$$

Розв'язок цього рівняння записується загальною формулою (1.14), яка дає:

$$z=e^{-\int\alpha\cdot adt}(C+\int\alpha\cdot b\cdot e^{\int\alpha\cdot adt});$$

$$z=e^{-\alpha\cdot a\cdot t}(C+\int\alpha\cdot b\cdot e^{\alpha\cdot a\cdot t});$$

$$z=e^{-\alpha\cdot a\cdot t}(C+\frac{b}{a}e^{\alpha\cdot a\cdot t}).$$

Враховуючи, що $x=\frac{1}{z}$ запишемо загальний розв'язок рівняння (3.24)

$$x=\frac{e^{a\cdot\alpha\cdot t}}{C+\frac{b}{a}e^{a\cdot\alpha\cdot t}}\ ,$$

або

$$x=\frac{1}{Ce^{-a\cdot\alpha\cdot t}+\frac{b}{a}}\ . \tag{3.27}$$

Враховуючи початкову умову $x(0)=x_0$ з останнього виразу знайдемо

$$x_0=\frac{1}{C+\frac{a}{b}};\quad C=\frac{1}{x_0}-\frac{b}{a}. \tag{3.28}$$

Тому остаточно

$$x(t)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x_0}-\frac{b}{a}\right)e^{-\alpha\cdot a\cdot t}+\frac{b}{a}}. \qquad (3.29)$$

Зауважимо, що розв'язок (3.29) можна також отримати розділяючи змінні в (3.24); звідки

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{b}{a-bx}\right)\frac{dx}{a}=\alpha dt.$$

Інтегруючи останнє, одержимо

$$\ln|x|-\ln|a-bx|=\alpha\cdot a\cdot t+\ln C,$$

що дає

$$\frac{x}{a-bx}=Ce^{\alpha at}.$$

Остаточно загальний розв'язок рівняння (3.24) буде

$$x(t)=\left(\frac{C\cdot a\cdot e^{\alpha at}}{1+C\cdot b\cdot e^{\alpha at}}\right). \qquad (3.30)$$

Враховуючи початкову умову $x(0)=x_0$, із (3.30) знаходимо

$$C=\frac{x_0}{a-bx_0}.$$

Таким чином, розв'язком задачі Коші буде функція

$$x(t)=\frac{1}{\left(\frac{b}{a}+\left(\frac{1}{x_0}-\frac{b}{a}\right)e^{-\alpha at}\right)}, \quad (a-bx_0)>0, (x_0<\frac{a}{b}) \quad . \qquad (3.31)$$

Якщо в (3.31) $a-bx_0<0$, тобто $x_0>\frac{a}{b}$, то одержимо випадок ***B***: функція $\mathbf{x(t)}$ спадає і опукла вниз. Але цей випадок не має економічного сенсу ($x \ < \frac{a}{b}$)

Знайдена нами функція $x(t)$ відноситься до класу **логістичних кривих** і широко використовується в економіці.

(**Логістичною функцією** (кривою) економісти називають функцію виду

$$x(t)=\frac{1}{\gamma+\alpha\cdot\beta^{t}}, \qquad 0<\beta<1, \alpha>0, \gamma>0 \quad).$$

Схематично графік функції x(t), при $x_0 < \frac{a}{b}$ зображений на рис 4.

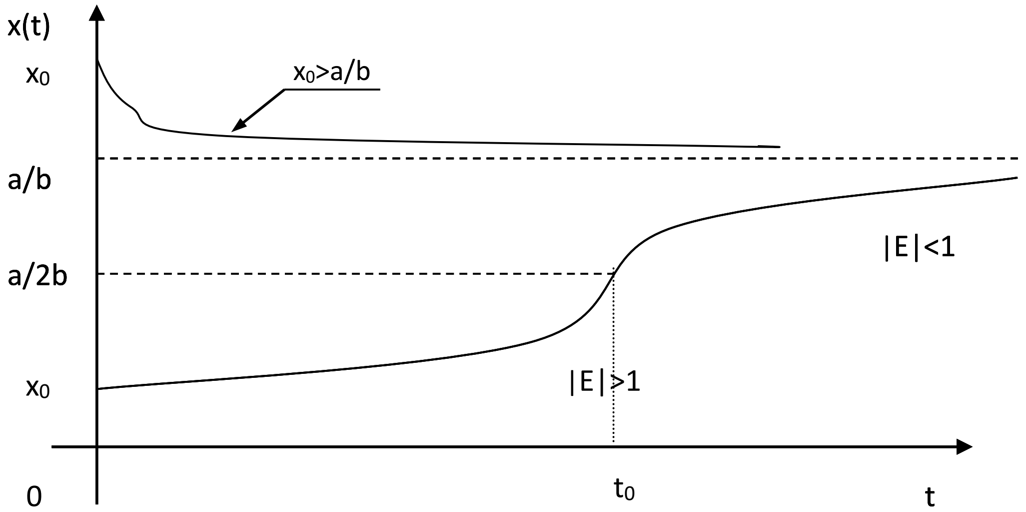


Рис 4

Із (3.31) легко бачити, що при $t = 0, x(0) = x_0$, а при $t \to \infty,\ x(t) \to \frac{a}{b}$.

Дійсно, оскільки

$$x(t) = \frac{1}{\left[\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{b}{a}\right)e^{-\alpha \cdot a \cdot t}\right]} = \frac{a \cdot x_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-\alpha at}} \quad ,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{a}{b}; \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = x_{ст.}, \text{ де } x_{ст.} = \frac{a}{b}.$$

Розв'язок $x = x_{ст.} = \frac{a}{b}$ називається **стаціонарним** (постійним), тому $x'_{ст} = 0$.

Таким чином, при $x_0 < \frac{a}{b}$ і $t < t_0$ виробництво розвивається прогресивно ($x' > 0, x'' > 0$); при $t = t_0$ маємо точку перегину, а при $t > t_0$ виробництво сповільнюється; при $t \to \infty$ виходить на стаціонарний режим (див. Рис.4); при $x_0 > \frac{a}{b}$ одержимо розв'язок, який немає реального економічного сенсу.

Відмітимо також, що рівняння виду

$$x' = a \cdot x \cdot (b - x)$$

розв'язок якого $x(t) = \frac{b}{1 + Ce^{-abt}}$, де C – довільна постійна при відповідних значеннях параметрів a, b описує моделі росповсюдження епідемій, розмноження бактерій в обмеженому середовищі існування, описують зміну чисельності населення, розповсюдження інформації (реклами) і т. п.

Як ми бачили при $x(t)=b$ із рівняння логістики випливає, шо $\frac{dx}{dt}=0$ і похідна змінює знак з “+” на “-”, отже $x(t)=b$ є максимумом розв’язку. Крім того, прямі обчислення показують, що $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x_{ст.}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{1+Ce^{-abt}}=b$, тобто $x(t)=b$ є стаціонарним розв’язком.

При $x(t)<<b$, $b-x(t)\approx b$, тому $\frac{dx}{dt}\approx a\cdot b\cdot x(t)$, що відповідає звичайному експоненціальному росту:

$$x(t)=C\cdot e^{a\cdot b\cdot t}.$$

При постійних k, a та b це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, а при змінних - це рівняння Бернуллі з $n=2$.

3.8 Розширення реклами. Задача визначення кількості покупців

Задача 8. Нехай в магазині продається деякий товар $\mathbf{A}$, про який в момент часу $\mathbf{t}$ із N осіб бажаючих його купити, знає лише х покупців. Вважаючи, що товар рекламується, знайти закон зміни x від часу t.

Вважаємо, що для прискорення продажу товару $\mathbf{A}$, були зроблені об'яви в газетах та по телебаченню. Крім того інформація про нього поступила безпосередньо від одного покупця до іншого..

Без втрати загальності можна вважати, що після реклами, швидкість зміни знаючих про товар A пропорційна числу поінформованих і числу непоінформованих покупців.

Написати диференціальне рівняння якому задовольняє функція числа поінформованих покупців.

Розв'язування. Якщо за точку відрахування часу вважати час після рекламних оголошень, коли про товар дізналось $\frac{N}{n}$ людей, то при $\left(\frac{N}{n}\right)\in N$ отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dt}=kx(N-x), k>0 \tag{3.32}$$

з початковою умовою (при $t=0$, $x(0)=\frac{N}{n}$).

Рівняння (3.32) співпадає з рівнянням (3.24) при

$$\alpha=k,\ a=N,\ b=1,\ x_0=\frac{N}{n}\ . \tag{3.33}$$

Тому підставляючи в розв'язок (3.29) вказані вище значення (3.33) дістанемо:

$$x = \frac{1}{\frac{1}{N} + \left(\frac{n}{N} - \frac{1}{N}\right)e^{-k \cdot N \cdot t}} \quad . \tag{3.34}$$

Із (3.34) одержимо

$$x = \frac{N}{1 + (n-1)e^{-k \cdot N \cdot t}} \ . \tag{3.35}$$

Зауважимо, що розділяючи змінні в (3.32) можна безпосередньо знайти розв'язок (3.35). Дійсно, інтегруючи (3.32), дістанемо

$$\ln\left(\frac{x}{N-x}\right)^{\frac{1}{N}} = kt + C. \tag{3.36}$$

Отже,

$$\frac{x}{N-x} = e^{N(kt+C)},$$

або

$$x = N\frac{e^{N(kt+C)}}{1+e^{N(kt+C)}} = \frac{N}{1+e^{-N(kt+C)}} \ . \tag{3.37}$$

Враховуючи початкові умови, остаточно отримаємо розв’язок

$$x = \frac{N}{1+(n-1)e^{-Nkt}} \ .$$

Радимо читачеві самому одержати цей розв’язок, знайшовши сталу інтегрування C з початкової умови $x(0) = \frac{N}{n}$.

Далі розглянемо більш загальні диференціальні рівняння першого порядку, а саме рівняння вигляду

$$y' = f(y). \tag{3.38}$$

Означення. Розв’язки $y = y^*$ диференціального рівняння $y' = f(y)$ при яких $f(y^*) = 0$, будемо називати **стаціонарними розв’язками**.

Так рівняння:

а). $y' = y(a - by)$;

в). $y' = (y - y_1)(y - y_2)$,

де a, b, y_1, y_2 - задані функції мають відповідно такі стаціонарні розв’язки:

а). числа $y^* = 0$, $y^* = \frac{a}{b}$; в). $y^* = y_1$, $y^* = y_2$.

3.9 Незадоволений попит. Рівняння Самуельсона*

Незадоволеним попитом в економіці називають різницю між величинами попиту $Q(p)$ та пропозиції $S(p)$, які є функціями ціни, тобто: $Q(p)-S(p)$.

Задача 9. Написати диференціальне рівняння зміни ціни, коли відомо, що швидкість її зміни пропорційна незадоволеному попиту. Знайти його розв'язки, для $Q(p)=a-bp$, $S(p)=c+dp$ при умові, що при $t=0$ задана початкова ціна $p(0)=p_0$.

Розв'язування. Згідно припущенню Самуельсона швидкість зміни ціни пропорційна незадоволеному попиту з коефіцієнтом k, тобто

---

* Самуельсон Пол Ентоні (1915-2009) – американський економіст, лауреат Нобелівської премії (1970)

$$p'(t)=k(Q(p)-S(p)),\ (k>0)\ . \qquad (3.39)$$

Отже при перевазі попиту над пропозицією ($Q(p)>S(p)$**),** $p'(t)>0$ **- ціна зростає, і навпаки, при** $Q(p)<S(p)$**,** $p'(t)<0$ **- ціна спадає.**

Рівняння (3.39) при заданих $Q(p)$ та $S(p)$ інтегрується методом розділення змінних. За умовою задачі функції $Q(p)$ та $S(p)$ задані

$$Q(p)=a-bp,$$
$$S(p)=c+dp,$$

де a,b,c,d - задані додатні постійні.

Рівноважній ціні $(Q(p)=S(p))$ відповідає умова $p'(t)=0$, тому рівноважна ціна співпадає з стаціонарним розв'язком $p_{ст.}=p_{рівн.}=\dfrac{a-c}{d+b}$.

Враховуючи вид $Q(p)$ та $S(p))$, рівняння (3.39) представимо у вигляді

$$p'(t)=-k(d+b)p+k(a-c)\,. \qquad (3.40)$$

Рівняння (3.40) є лінійним неоднорідним і його розв'язок є функція

$$p(t)=e^{\int(-k)(d+b)dt}\left[\frac{a-c}{d+b}e^{k(d+b)t}+C_1\right].$$

Звідки,

$$p(t)=e^{-k(d+b)\cdot t}\left[\frac{a-c}{d+b}e^{k(d+b)t}+C_1\right].$$

Остаточно, розв'язком рівняння (3.39) є функція

$$p(t)=\frac{a-c}{d+b}+C_1e^{-k(d+b)t}, \qquad (3.41)$$

де C_1 - постійна інтегрування.

Оскільки при $t=0$, задана початкова ціна $p(0)=p_0$, то із рівняння (3.41) випливає, що

$$p_0=\frac{a-c}{d+b}+C_1;$$

звідки $C_1 = p_0 - \frac{a-c}{d+b}$. Тоді

$$p(t) = \frac{a-c}{d+b} + \left(p_0 - \frac{a-c}{d+b}\right)e^{-k(d+b)t}. \qquad (3.42)$$

В (3.42) перший доданок є стаціонарний розв'язок

$$p_{ст.} = \frac{a-c}{d+b}.$$

Зауважимо, що $p_{ст.} = \lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \lim\limits_{t\to\infty}[\frac{a-c}{d+b} + \left(p_0 - \frac{a-c}{d+b}\right)e^{-k(d+b)t}]$.

Проаналізуємо одержаний розв'язок (3.42), який перепишемо у вигляді

$$p(t) = p_{ст.} + (p_0 - p_{ст.})e^{-k(d+b)t}.$$

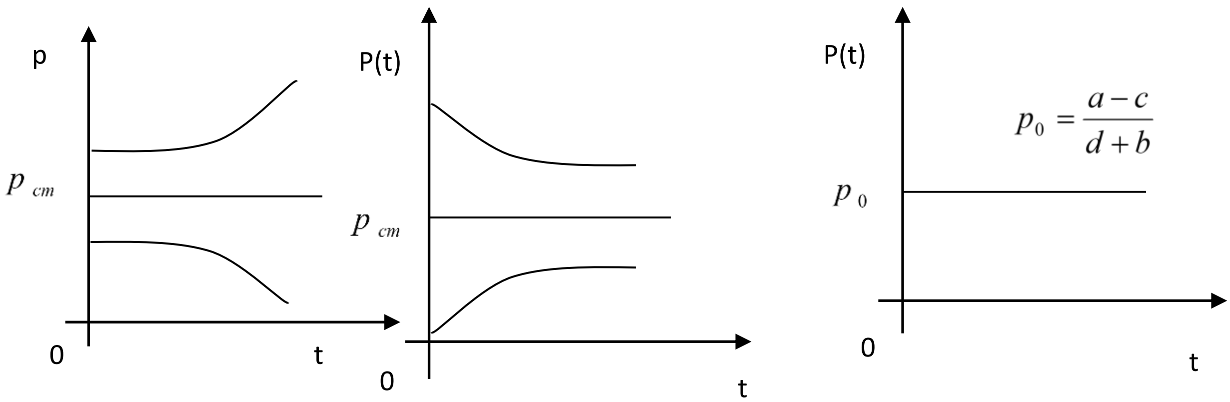
1. Нехай $d < -b$. При $C_1 > 0$ або, що одне й теж саме при $p_0 > \frac{c-a}{d+b}$, ($p_0 > p_{ст.}$), другий доданок, а разом з ним і функція $p(t)$ прямують до $+\infty$, при $t \to \infty$, а при $C_1 < 0$, $(p_0 < p_{ст.})$ $p(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$.

2. Нехай $d < -b$. Тоді при $t \to +\infty$ другий доданок прямує до нуля незалежно від знаку $p_0 - p_{ст.}$ і $p(t) \to p_{ст.}$: тобто ціна стає стаціонарною (рівноважною).

Таким чином, при $p_0 < p_{ст.}$ ціна $p(t)$ прямує до $p_{ст.}$ зростаючи, а при $p_0 > p_{ст.}$ ціна $p(t)$ прямує до $p_{ст.}$ спадаючи.

3. Нехай $d > -b$, тоді $p(t) = \frac{c-a}{d+b} + C_1 = P_0$, тобто розв'язок є постійним (початкова ціна не змінюється).

Графіки розв'язків для випадків 1 - 3 представлені на рис.5 а), б), в).



а) б) в)

Рис.5

3. 10 Формування інвестицій від прибутку

Розглянемо випадок, коли інвестиції формуються не від доходу, а від прибутку: тобто швидкість росту випуску товару пропорційна доходу

Задача 10. Відомо, що функція росту продукції $x(t)$ задовільняє диференціальному рівнянню

$$x'(t) = \alpha\, \Pi(x), \qquad (3.43)$$

де - $\alpha = e \cdot m$, m-норма інвестиції, $\frac{1}{e}$ - норма акселерації, $\Pi(x) = p(x) \cdot x - c(x)$, $p(x)$ - ціна товару, $c(x)$ - витрати.

Розв'язати задачу Коші для даного диференціального рівняння при умові, що ціна $p(x)$ та витрати $c(x)$ - лінійно залежить від кількості продукції (товару), тобто:

$$p(x) = a - bx, \qquad (3.44)$$

$$c(x) = \gamma x + \beta, \qquad (3.45)$$

$a > 0$, $b > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$, а $x(0) = x_0$. Побудувати ескіз графіка розв'язку.

Розв’язування. Враховуючи умову задачі запишемо диференціальне рівняння

$$x'(t) = \alpha\, \Pi(x),$$

яке при (3.43) – (3.45) набуде виду

$$x' = \alpha(p(x) \cdot x - \gamma \cdot x - \beta).$$

Це рівняння роз’вяжемо в найпростішому випадку, для $p(x) = a - b \cdot x$. Тоді

$$\Pi(x) = -bx^2 + (a - \gamma)x - \beta = -b\left(x^2 + \frac{(\gamma - a)}{b} \cdot x + \frac{\beta}{b}\right), \qquad (3.46)$$

що дає модель росту у вигляді диференціального рівняння першого порядку з нелінійною правою частиною

$$x' = -\alpha \cdot b\left(x^2 + \frac{\gamma - a}{b}x + \frac{\beta}{b}\right). \qquad (3.47)$$

Оскільки в (3.47) справа квадратний тричлен відносно функції $x(t)$, то в залежності від його дискримінанту $D = \left(\frac{\gamma - a}{b}\right)^2 - 4\frac{\beta}{b}$ розглянемо три випадки .

1. Якщо $D < 0$, тоді $\Pi(x) < 0$ із (3.47) випливає, що $x' < 0$. Економічно це значить, що витрати перевищують доход. Оскільки $x' < 0$, то функція $x(t)$ буде спадною і настане момент коли вона стане меншою нуля, тобто наступить банкрутство.

В цьому випадку, після виділення в квадратному тричлені повного квадрату, рівняння (3.47) можна записати у вигляді

$$x' = -\alpha \cdot b \cdot \left[\left(x + \frac{\gamma - a}{2b}\right)^2 + \frac{\beta}{b} - \left(\frac{\gamma - a}{2b}\right)^2\right].$$

Це рівняння з розділяючими змінними і його розв'язком буде функція

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{4\beta}{b}-\left(\frac{\gamma-a}{b}\right)^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+\frac{\gamma-a}{b}}{\sqrt{\frac{4\beta}{b}-\left(\frac{\gamma-a}{b}\right)^2}}=-\alpha\cdot bt+C. \tag{3.48}$$

(Радимо читачеві одержати розв'язок (3.48) самостійно).

Графіком цього роз'вязку в залежності від C будуть криві схематично зображені на рис 6.

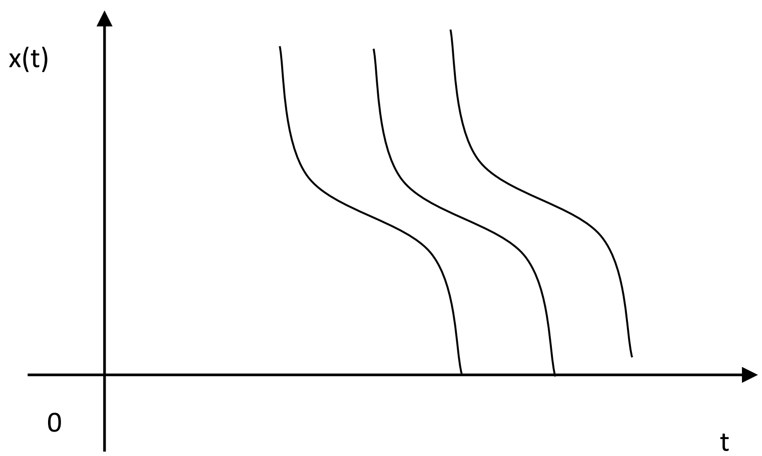


Рис. 6

2. Якщо $D=0$, то тоді $\Pi=-b\left(x-\frac{a-\gamma}{2b}\right)^2\leq 0$ і із рівняння (3.49)

$$x'=-\alpha\cdot b\cdot\left(x-\frac{a-\gamma}{2b}\right)^2 \tag{3.49}$$

випливає, що $x'\leq 0$.

Диференціальне рівняння (3.49) легко інтегрується. Дійсно, розділивши змінні

$$\frac{dx}{\left(x-\frac{a-\gamma}{2b}\right)^2}=-\alpha\cdot b\cdot dt,$$

або

$$\left(x-\frac{a-\gamma}{2b}\right)^{-1}=\alpha\cdot b\cdot t+C;$$

звідки

$$x=\frac{a-\gamma}{2b}+\frac{1}{\alpha\cdot b\cdot t+C}\ . \tag{3.50}$$

Як і раніше, через $x_{ст.}$ позначимо стаціонарний розв'язок рівняння (3.49)

$$x_{ст.} = \frac{a-\gamma}{2b}.$$

Якщо тепер врахувати задану при $t = 0$, початкову умову $x(0) = x_0$, то враховуючи (3.50) знайдемо постійну інтегрування $C = \frac{1}{(x_0 - x_{ст.})}$. Тоді розв'язок (3.50) набуде виду

$$x = \frac{a-\gamma}{2b} + \frac{x_0 - x_{ст.}}{1 + (x_0 - x_{ст.})\alpha \cdot b \cdot t}. \tag{3.51}$$

Очевидно, що при $x_0 > x_{ст.}$ постійна $C > 0$; тоді при $t \to +\infty$ розв'язок (3.50) спадаючи прямує до стаціонарного $x(t) \to \frac{a-\gamma}{2b} = x_{ст.}$.

Аналогічно при $x_0 < x_{ст.}$ постійна $C < 0$; тоді $x(t) \to x_{ст.}$ зростаючи при $t \to -\infty$. Цей випадок немає в економіці сенсу.

Очевидно також, що $x_{ст.} = \frac{a-\gamma}{2b} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{\gamma}{b}\right)$, причому $x_{ст.} < \frac{a}{b}$.

Таким чином, у цьому випадку існує одна стаціонарна траєкторія $x = x_{ст.}$

Схематично графіки розв'язку в залежності від знаку $x_0 - x_{ст.}$ зображені на рис. 7.

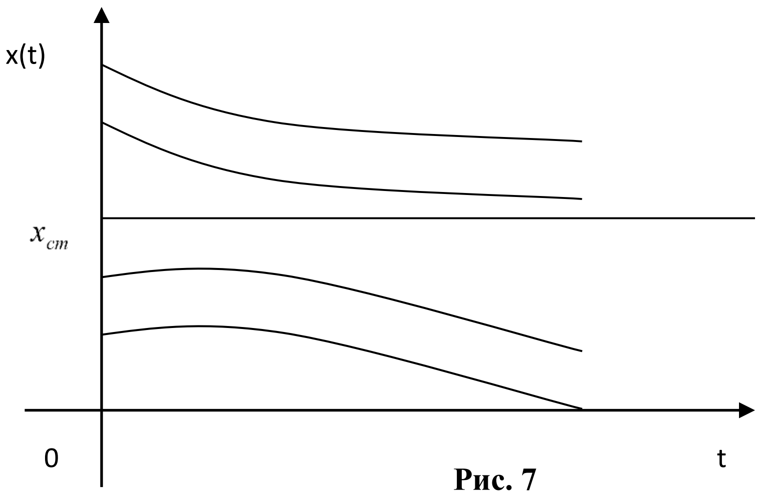


Рис. 7

3. Якщо $D > 0$, тоді

$$\Pi(x) = -b(x - x_1)(x - x_2) \text{ де } x_1 = \frac{a-\gamma-\sqrt{D}}{2b};\ x_2 = \frac{a-\gamma+\sqrt{D}}{2b};\ x_2 > x_1.$$

Рівняння (3.47) набуде виду

$$x'(t) = -\alpha \cdot b \cdot (x - x_1)(x - x_2). \tag{3.52}$$

Розділяючи змінні в (3.52), одержимо

$$\frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = -\alpha \cdot b \cdot dt,$$

що дає

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\int\left(\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2}\right)dx = -\int \alpha \cdot b \cdot dt\,.$$

Далі інтегруючи, знайдемо

$$\ln\frac{x - x_1}{x - x_2} = (x_2 - x_1)\cdot\alpha\cdot b\cdot t + \ln C\,,$$

або

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = Ce^{(x_2 - x_1)\alpha\cdot b\cdot t}\,.$$

Остаточно, розв'язавши відносно $x(t)$, одержимо:

$$x(t) = \frac{x_1 - Cx_2e^{(x_2 - x_1)\cdot\alpha\cdot b\cdot t}}{1 - Ce^{(x_2 - x_1)\cdot\alpha\cdot b\cdot t}}\,. \qquad (3.53\,)$$

Якщо врахувати задану початкову умову при $t = 0$, $x(0) = x_0$, то із (3.53) знайдемо постійну інтегрування $C = \dfrac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2}$.

Якщо $x_0 > x_2$ (тоді і $x_0 > x_1$), (або $x_0 < x_1$ (тоді і $x_0 < x_2$)), то із умови $x - x_1 > 0, x - x_2 > 0$ і (3.52) випливає, що $x'(t) < 0_i$ і траєкторія (3.53) спадає $x(t) \to x_2$ при $t \to \infty$ (або $x(t) \to x_1$ при $t \to -\infty$) (див. Рис.8 а).

Якщо $x_1 < x_0 < x_2$, тоді $x - x_1 > 0, x - x_2 < 0$ і із (3.52) випливає, що $x'(t) > 0$ траєкторія (3.53) зростає $x(t) \to x_2$ при $t \to \infty$.

В цьому випадку траєкторія (3.53) є логістичною кривою і тому її графік буде таким як на Рис.8 б).

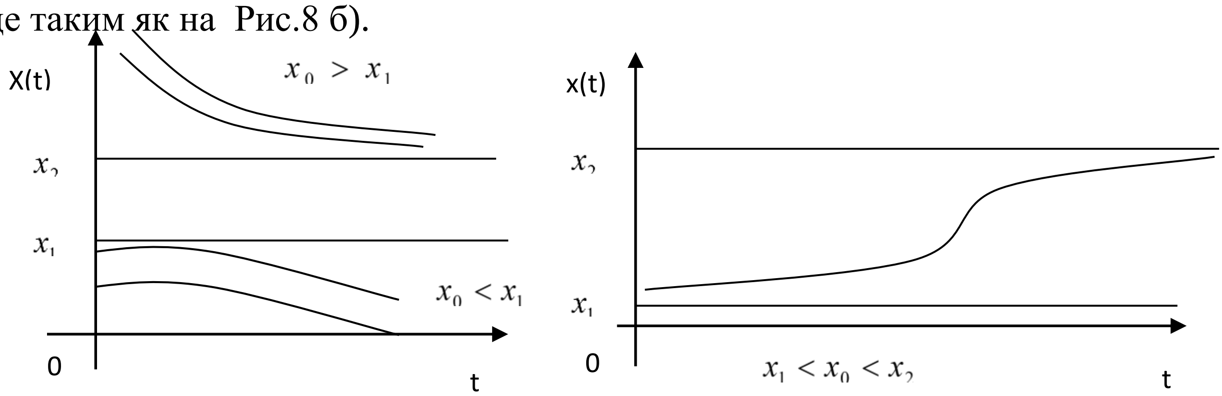


Рис. 8 а) в)

3.11 Динамічна модель Кейнса*

Задача. 11 Відомо, що національний дохід задається формулою $Y(t)=S(t)+I(t)+E(t)$, де - $S(t)$ споживання: $S(t)=a(t)Y(t)+b(t)$; $I(t)$ - інвестиції, $E(t)$ - державні витрати. Функції $S(t), a(t), E(t), b(t)$ - є відомими і функціями часу t. Враховуючи, що $I(t)=k(t)Y'(t)$ записати диференціальне рівняння для $Y(t)$ і розв'язати його при початковій умові $Y(0)=Y_0$ та при постійних $a(t)=a$, $K(t)=k$, $b(t)=b$, $E(t)=E$. Дослідити одержаний розв'язок.

Розв'язування. В цій задачі сформульована найпростіша балансова модель економіки, яка включає в себе головні компоненти динамики витратної та доходної частини. Оскільки $Y(t), E(t), S(t), I(t)$ - національний доход, державні витрати, споживання та інвестиції відповідно, то з умови задачі випливає, що справедливі такі співвідношення:

$$\begin{cases} Y(t)=S(t)+I(t)+E(t), \\ S(t)=a(t)Y(t)+b(t), \\ I(t)=k(t)Y'(t), \end{cases} \tag{3.54}$$

де $a(t)$ - коефіцієнт схильності до споживання $(0<a<1)$; $b(t)$ - кінцеве споживання; $k(t)$ - норма акселерації.

Перше рівняння системи (3.54) являє собою баланс витрат, які в сумі рівні національному доходу. Друге рівняння показує, що споживання є частиною національного доходу, а кінцеве споживання $b(t)$. Третє рівняння виражає відомий нам закон акселерації: розмір інвестицій дорівнює добутку норми акселерації k на граничний (маржинальний) національний доход. Величина $k(t)$ залежить від рівня технологій та інфраструктури даної держави.

Нам потрібно при заданих $a(t), b(t), k(t), E(t)$ знайти дінамику національного доходу $Y(t)$. Для цього в перше рівняння системи (3.54) підставимо друге та третьє відповідно. Після очевидних перетворень одержимо лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно $Y(t)$:

$$Y'=\frac{1-a(t)}{k(t)}Y-\frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \tag{3.55}$$

з початковою умовою $Y(0)=Y_0$.

Рівняння (3.55) є конкретною моделлю пункту 3. Розглянемо два випадки:
1. Нехай основні параметри a, b, k, E - постійні. Тоді одержимо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$Y'=\frac{1-a}{k}Y-\frac{b+E}{k} \tag{3.56}$$

---

* Кейнс Джон Мейнард (1883-1946) – англійський економіст

Запишемо загальний розв’язок однорідного $Y_{3.0}$ та частинний розв’язок $Y_{чн}$ неоднорідного рівняння (3.56) :

$$Y_{3.0} = C \cdot e^{\frac{1-a}{k} \cdot t}, \quad Y_{ст} = Y_{чн} = \frac{b+E}{k} \quad . \qquad (3.57)$$

Тоді загальний розв'язок буде сумою загального розв’язку однорідного та частинного неоднорідного

$$Y(t) = \frac{b+E}{k} + C \cdot e^{\frac{1-a}{k} t} \quad . \qquad (3.58)$$

Розглянемо тепер задачу Коші. Нехай при $t = 1$задана початкова умова $Y(0) = Y_0$. Тоді із (3.58) одержимо

$$Y_0 = \frac{b+E}{k} + C \cdot i, \quad C = Y_0 - \frac{b+E}{k}$$

тоді і розв'язок (3.58) набуде виду

$$Y(t) = \left(Y_0 - \frac{b+E}{k} \right) e^{\frac{1-a}{k} t} + \frac{b+E}{k} \quad .$$

Звідси слідує, що, при $Y_0 > \frac{\frac{b+E}{k}}{k}$ інтегральні криві відхиляться з часом t вгору від стаціонарного розв'язку $Y_{ст.}$, а при $Y_0 < \frac{(b+E)}{k}$ відхиляються з часом t вниз від $Y_{ст}$. Таким чином в першому випадку національний доход зростає, а у другому - спадає і розв'язок $Y(t)$ не є стаціонарним (постійним) (див рис. 9), тобто він не є стійким при $t \to \infty$.

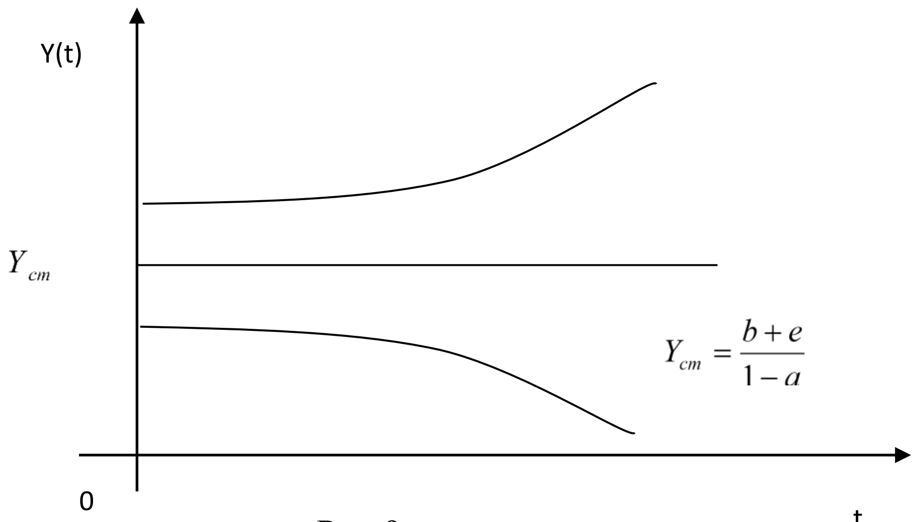


Рис. 9

В загальному випадку при змінних $a(t), k(t), b(t), E(t)$ загальний інтеграл рівняння дається співвідношенням

$$y(t)=e^{\int\frac{1-a}{k}dt}\left(c-\int\frac{b+E}{k}\cdot e^{\int\frac{a-1}{k}dt}dt\right).$$

В попередніх задачах виробнича функція в моделях росту не враховувалось. Зупинемося на випадку, коли виробнича функція вибирається нелінійною.

3.12 Неокласична модель росту (модель Солоу*)

В моделі Солоу стан економіки задається з допомогою п'яти змінних стану: $Y(t)$ - кінцевий продукт, $L(t)$ - наявні трудові ресурси, $K(t)$ - виробничі фонди, $I(t)$ - інвестиції, $C(t)$ - величина невиробничого споживання. Вважається, що кінцевий продукт використовується на невиробниче споживання та інвестиції:

$$Y(t)=C(t)+I(t).$$

Оскільки

$$I(t)=\rho\cdot Y(t),$$

то

$$C(t)=(1-\rho)Y(t).$$

Задача 12. В моделі Солоу однорідна виробнича функція вибирається нелінійною $Y=F(K,L)$. Нехай $Y(t)$ - національний доход, $K(t)$ - об'єм капіталовкладень, $L(t)$ - величина витрат праці, $k=\dfrac{K}{L}$ - фондоозброєність відповідно виробнича функція лінійно-однорідна, а $f(k)=\dfrac{F(K,L)}{L}=F(k,1)$ - продуктивність праці; причому $f'(k)>0$, $f''(k)<0$.Вважаємо, що мають місце такі припущення:

1) природний приріст в часі трудових ресурсів виражається співвідношенням $L'=\alpha L$, де α - коефіцієнт росту (темп приросту); $L(0)=L_0$.

2) інвестиції використовуються на збільшення виробничих фондів K' та на амортизацію $I'=K'+\beta K$, де β - норма амортизації; $K(0)=K_0$.

3) $Y=I+K$.

Написати рівняння зміни фондоозброєності. Провести аналіз.

Розв'язування. Відомо, що знаючи норму інвестицій ρ, можна записати $I=\rho\cdot Y$, що в силу припущення 2) та означення виробничої функції дає

---

* Солоу Роберт Мертон (1924-2018) – американський економіст, лауреат Нобелівської премії (1987)

змогу одержати співвідношення між K', К та L:

$$K'+\beta K=\rho\cdot F(K,L)$$

Крім того із означення фондоозброєності випливає, що

$$k = \frac{K}{L},\ \ln k = \ln K - \ln L.$$

Диференціюючи останнє співвідношення одержимо

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{l}.$$

В силу припущеннь 1) та 2) одержимо

$$\frac{k'}{k} = \frac{\rho Y - \beta K}{K} - \alpha. \tag{3.59}$$

Враховуючи $k = \frac{K}{L}$ із (3.59) одержуємо шукане диференціальне рівняння відносно k

$$k' = \rho \cdot f(k) - (\alpha + \beta)k \tag{3.60}$$

та початкову умову $k(0) = k_0$, де $k_0 = \frac{K_0}{L_0}$.

Рівняння (3.60) називається **рівнянням неокласичного росту**.

У рівнянні неокласичного росту існує стаціонарнрий розв'язок $k = k*$. Дійсно в силу властивостей виробничої функції графіки функцій $\rho \cdot f(k)$ та $(\alpha + \beta)k$ обов'язково перетнуться і рівняння

$$\rho \cdot f(k) - (\alpha + \beta)k = 0 \tag{3.61}$$

буде мати розв'язок $k = k*$, $k* > 0$.

Визначимо макропоказники K, L, C, I, Y на стаціонарному розв'язку $k*$.

Оскільки з властивостей виробничої функції випливає, що $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$ і $f'(k) \to 0$ при $k \to \infty$, тому функція f(k) зростаюча, опукла вгору і її темп росту сповільнюється. Отже, рівняння (3.61) має єдиний розв'язок $k* > 0$ при умові, що $\rho \cdot f'(0) > \alpha + \beta$ (див. Рис. 10) .

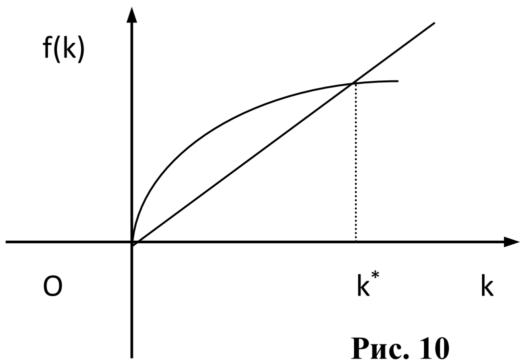


Рис. 10

Макропоказники виражаються через $L(t)$ і на стаціонарній траєкторії мають вид: $L(t) = L_0 e^{\alpha t}$, $K(t) = k * \cdot L(t) = k * \cdot L_0 e^{\alpha t}$,

$$Y(t) = f(k*) \cdot L(t) = f(k) * \cdot L_0 e^{\alpha t},\ C(t) = (1 - \rho) f(k*) \cdot L_0 e^{\alpha t},$$

$$I(t) = \rho f(k*) \cdot L_0 e^{\alpha t}.$$

Отже, на стаціонарній траєкторії всі макропоказники ростуть експоненціально і пропорційно трудовим ресурсам.

Розглянемо окремий випадок коли $f(k) = \sqrt{k}$, тобто коли $F(K,L) = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$.

Розділивши змінні, рівняння (3.60) записати у вигляді

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[\rho - (\alpha+\beta)\cdot\sqrt{k}\right]} = dt,$$

яке заміною $\sqrt{k} = u$, $(dk = 2udu)$ зводиться до рівнянь

$$\frac{2du}{\rho - (\alpha+\beta)u} = dt, \quad \frac{du}{u - \dfrac{\rho}{\alpha+\beta}} = -\frac{\alpha+\beta}{2}dt,$$

звідки $u = \left[\dfrac{\rho}{\alpha+\beta} + Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right]$, або $k = \left[\dfrac{\rho}{\alpha+\beta} + Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right]^2$.

Знайдемо стаціонарний розв'язок при $t \to \infty$; $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = \left(\dfrac{\rho}{\alpha+\beta}\right)^2 = k_{ст.} = k^*$.

Таким чином при постійних α,β,ρ функція фондоозброєності прямує до стаціонарного розв'язку $k_{ст}$ незалежно від початкових даних.

Нехай при $t = 0$ фондоозброєність задана числом k_0, тобто: $k(0) = k_0$.

Тоді $k_0 = \left[\dfrac{\rho}{\alpha+\beta} + C\right]^2$, звідки $C = \sqrt{k_0} - \dfrac{\rho}{\alpha+\beta}$. Отже, розв'язок рівняння (3.60) остаточно набуде виду

$$k(t) = \left[\frac{\rho}{\alpha+\beta}\left(1 - e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right) + \sqrt{k}\cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t}\right]^2.$$

Графіки функції розв'язку при різних значеннях k_0 зображені на Рис. 11.

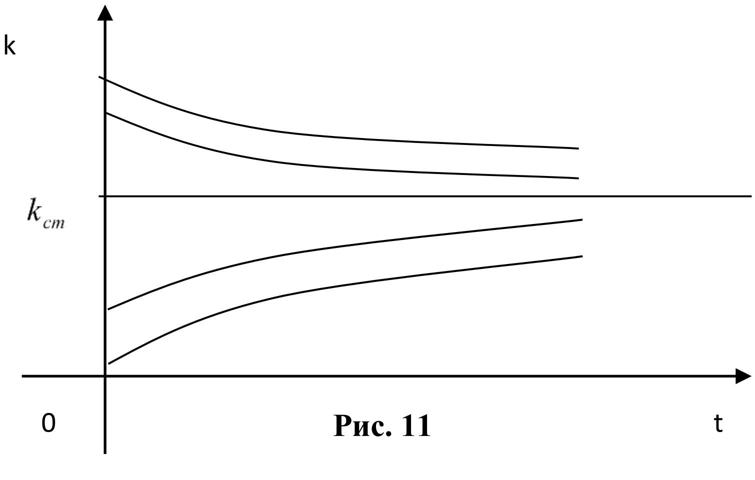


Рис. 11

Знайдемо граничну (стаціонарну) продуктивність праці

$$y=\frac{Y(t)}{L(t)}=\frac{f(k^*)\cdot L(t)}{L(t)}=f(k^*)=\sqrt{k^*}=\frac{\rho}{\alpha+\beta}.$$

Отже $y=\dfrac{\rho}{\alpha+\beta}$, тобто граничну продуктивність праці виражається через норми інвестицій, амортизації та темп приросту населення.

Питоме споживання (на одного працюючого) також збігається до свого стаціонарного значення:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{I(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-\rho)\cdot Y(t)\cdot L(t)}{L(t)}=$$

$$=(1-\rho)\lim_{t\to\infty}Y(t)=(1-\rho)f(k^*)=(1-\rho)\sqrt{k^*}=(1-\rho)\frac{\rho}{\alpha+\beta}.$$

Знайдемо максимальну величину норми накопичення ρ, при якій питоме споживання найбільше. Для цього прирівняємо до нуля похідну по ρ від $(1-\rho)\dfrac{\rho}{\alpha+\beta}$:

$$\frac{1-2\rho}{\alpha+\beta}=0\text{, звідки } \rho^0=\frac{1}{2}.$$

Враховуючи, що $F(K,L)=K^{\frac{1}{2}}\cdot L^{\frac{1}{2}}$ із останнього співвідношення випливає, що в стаціонарному режимі оптимальна норма накопичення дорівнює коефіцієнту по фондах, оскільки

$$E_K(F)=\frac{dF}{dK}\cdot\frac{K}{F}=\frac{\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\cdot L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}\cdot L^{\frac{1}{2}}}\cdot K=\frac{1}{2}.$$

Цей факт є загальним для виробничої функції Кобба-Дугласа* $F(K,L)=A\cdot K^{\alpha}\cdot L^{1-\alpha}$, де $A>0, 0<\alpha<1$. Для неї $\rho^0=2$. **Це правило називається "золотим правилом" економічного росту.**

Дійсно розв'язом рівняння

$$\frac{dk}{dt}=\rho\cdot f(k)-(\alpha+\beta)k,\ \ k(0)=k_0,$$

при $f(k)=A\cdot k^{\alpha}$ заміною змінних $k(t)=u(t)e^{-(\alpha+\beta)t}$, де $u(t)$ – нова невідома функція, зводиться до розв'язування такого диференціального рівняння

*Кобб Чарльз (1875-1949) – американський математик і економіст

Дуглас Пол Ховард (1892-1976) – американський економіст

$$\frac{du}{dt}=\rho\cdot A\cdot u^{\alpha}e^{(1-\alpha)(\alpha+\beta)t},\ \ u(0)=k_0.$$

Останнє легко розв'язується:

$$\frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha} = \frac{\rho \cdot Ae^{(1-\alpha)(\alpha+\beta)t}}{(1-\alpha)(\alpha+\beta)} + C;$$

і з умови $u(0) = k_0$ знаходимо, що $C = (k_0^{1-\alpha} - \dfrac{\rho \cdot A}{\alpha+\beta})/(1-\alpha).$

Остаточно

$$u(t) = (k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho \cdot A}{\alpha+\beta})(e^{(1-\alpha)(\alpha+\beta)t} - 1),$$

$$k(t) = u(t)e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

Перейшовши до границі одержимо

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = (\frac{\rho \cdot A}{\alpha+\beta})^{\frac{1}{1-\alpha}} = k_{ст.}$$

Продуктивність праці також збігається до стаціонарного значення

$$y = \lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{f(k)\cdot L(t)}{L(t)} = f(k_{ст.}) = A(k_{ст.})^{\alpha} = A(\frac{\rho A}{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Аналогічно і питоме споживання також збігається при $t \to \infty$ до стаціонарного розв'язку (до граничного питомого споживання)

$$\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty}(1-\rho)\frac{Y(t)}{L(t)} = (1-\rho)A = A(\frac{\rho A}{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = C_{ст.}$$

Знайдемо тепер при якому значенні норми накопичення ρ граничне питоме споживання максимальне. Для цього знайдемо похідну від $C_{ст.}$ і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dC_{ст.}}{d\rho} = \frac{d((1-\rho)\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}})}{d\rho} = A(\frac{A}{\alpha+\beta})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0,$$

що дає

$$-\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}-1}\cdot(1-\rho) = 0,$$

$$(\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{1-\rho}{\rho} - 1)\cdot\rho^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = 0, \quad \frac{\alpha-\rho}{(1-\alpha)\rho} = 0, \quad \rho^0 = \alpha..$$

Отже "золоте правило" економічного росту встановлено.

3.13 Задача про динамічну допомогу міжнародного валютного фонду (МВФ)

Задача. 13 Нехай виробничі інвестиції $I_2(t)$, країни що розвивається формуються за рахунок суми двох джерел: частини i_2 власного ВНП $Y_2(t)$, та імпортованого капіталу (або допомоги МВФ) в об'ємі $H(t)$ тобто: $I_2(t) = i_2 Y_2(t) + H(t)$.

Написати диференціальне рівняння, що описує ріст ВНП $Y_2(t)$ країн, які розвиваються, при початковій умові $Y_2(0) = Y_{02}$, та при умові, що об'єм імпортованого капіталу розвинених країн $H(t)$, де доля h від об'єму їх ВНП : $H(t) = h \cdot Y_1(t)$ (темп приросту ВНП країн МВФ, та доля h відомі). Дослідити одержаний розв'язок.

Розв'язування. Позначимо інвестиції і національний доход розвинених країн, та країн що розвиваються відповідно через I_1, Y_1 та I_2, Y_2, а відповідні їм норми інвестицій та акселерації через i_1, b_1, i_2, b_2.

Оскільки інвестиції є часткою ВНП, то $I_1 = i_1 Y_1$. Враховуючи принцип акселератора ($\dot{Y}_1 = \frac{1}{b_1} I_1(t)$), запишемо диференціальне рівняння для росту ВНП розвинених країн (донорів МВФ),

$$\dot{Y}_1 - \frac{i_1}{b_1} Y_1 = 0 \quad . \tag{3.62}$$

Звідси величина ВНП розвинених країн $Y_1(t)$ буде:

$$Y_1(t) = Y_1(0)e^{\lambda_1 t},$$

де через $\lambda_1 = \frac{i_1}{b_1}$- позначено темп приросту ВНП.

Розглянемо тепер задачу експорту капіталу до країн, що розвиваються. Оскільки за умовою задачі об'єм експорту $H(t)$ де доля h від об'єму капіталу країн експортерів, то:

$$H(t) = h \cdot Y_1(t).$$

Інвестиції I_2 країн, що розвиваються складаються з двох частин: частки власного ВНП та величини $H(t)$

$$I_2(t) = i_2 Y_2(t) + H(t) \quad . \tag{3.63}$$

В силу принципу акселерації запишемо тепер рівняння росту ВНП країн, які розвиваються

$$\dot{Y}_2 = \frac{I_2}{b_2}.$$

Останнє співвідношення разом з (3.63) дає шукане рівняння для Y_2

$$\dot{Y}_2 - \frac{i_2}{b_2} Y_2 = \frac{h}{b_2} Y_1(0) e^{\lambda_1 t} \quad . \tag{3.64}$$

Рівняння (3.64) є неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку з постійними коефіцієнтами. Знайдемо його загальний розв'язок як суму загального розв'язку відповідного йому однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\dot{Y}_2 - \frac{i_2}{b_2} Y_2 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{i_2}{b_2}$$

має вигляд

$$Y_2(t) = Ce^{\lambda_2 t}. \tag{3.65}$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.64) шукаємо у вигляді правої частини з невизначеним коефіцієнтом:

$$Y_{2\,\text{ч.н.}} = Ae^{\lambda_1 \cdot t} \quad . \tag{3.66}$$

Постійну A знайдемо підставляючи (3.66) в рівняння (3.64). Одержимо:

$$A\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 A e^{\lambda_1 t} = \frac{h}{b_2} Y_1(0) e^{\lambda_1 t} \quad . \tag{3.67}$$

Із (3.67) знайдемо алгебраїчне співвідношення для A

$$A(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{h}{b_2} Y_1(0) \ ,$$

звідки

$$A = \frac{H(0)}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \ , \text{де } H(0) = h \cdot Y_1(0). \tag{3.68}$$

Враховуючи (3.65) та (3.68) запишемо загальний розв'язок (3.64)

$$Y_2(t) = Y_{2\,\text{з.о.}} + Y_{2\,\text{ч.н.}};$$

$$Y_2(t) = Ce^{\lambda_2 t} + \frac{H(0)e^{\lambda_1 t}}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

В силу початкової умови $Y_2(0) = Y_{20}$ запишемо

$$Y_2(0) = Ce^{\lambda_2 0} + \frac{H(0)}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot e^{\lambda_1 0}.$$

Звідки постійна

$$C = Y_{20} - \frac{H(0)}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)}. \qquad (3.69)$$

Таким чином розв'язок задачі Коші лінійного рівняння (3.64) буде:

$$Y_2(t) = \left[\ Y_{20} - \frac{H(0)}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)}\ \right] e^{\lambda_2 t} + \frac{H(0)}{b_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot e^{\lambda_1 t}. \qquad (3.70)$$

При $\lambda_1 \to \lambda_2 \quad (\lambda_1 \to \lambda,\ \ \lambda_2 \to \lambda\ )$ із (3.70) знайдемо

$$Y_2(t) = Y_{20}e^{\lambda t} + \frac{H(0)}{b_2} te^{\lambda\ t}. \qquad (3.71)$$

Дійсно для другого та третього доданків в (3.70) можемо записати, враховуючи, що при $\lambda_1 \to \lambda_2 \quad (\lambda_1 \to \lambda,\ \lambda_2 \to \lambda\ )$:

$$\lim_{\lambda_1 \to \lambda_2} \frac{H(0)}{b_2}\left(\frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = \lim_{\lambda_1 \to \lambda_2} \frac{H(0)}{b_2} e^{\lambda_1 t}\left(\frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} - 1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) =$$

$$= \frac{H(0)}{b_2} \lim_{\lambda_1 - \lambda_2 \to 0} e^{\lambda_1 t}\left(\frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} - 1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right) = \left| \begin{matrix} \lambda_1 - \lambda_2 = y \\ y \to 0,\ \lambda_1 \to \lambda, \lambda_2 \to \lambda \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{H(0)}{b_2} \lim_{y \to 0} e^{\lambda_1 t}\left(\frac{e^{yt} - 1}{y}\right) = \frac{H(0)}{b_2} \lim_{y \to 0} e^{\lambda\ t}\left(t\frac{e^{yt}}{1}\right) = \frac{H(0)}{b_2} te^{\lambda t}. \qquad (3.72)$$

Зауваження 1. Рівність (3.71) можна одержати і безпосередньо шукаючи при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.64) у вигляді

$$Y_{2\,\text{ч.н.}} = Ate^{\lambda \cdot t}. \qquad (3.73)$$

Підставляючи (3.73) в рівняння (3.64) одержимо

$$Ae^{\lambda t} + At\lambda\ e^{\lambda t} - \lambda\ Ate^{\lambda t} = \frac{e^{\lambda t}}{b_2}H(0),$$

звідки

$$A = \frac{H(0)}{b_2}.$$

Отже,

$$Y_{2ч.н.} = \frac{H(0)}{b_2}te^{\lambda\ t}\ ,$$

що співпадає з (3.72).

Зауваження 2. Економістам величини $I_i(0), Y_i(0), \dot{Y}_i(0) \quad (i = 1,2)$ відомі на основі статистичних даних. Тому константи, що входять у розв'язки (3.70) - (3.71) визначаються на їх основі таким чином:

$$b_i = \frac{I_i(0)}{\dot{Y}_1(0)} = \frac{I_i(0)}{Y_i(0)\cdot r_i(0)}, \quad i = 1,2,$$

де

$$\lambda_1 = \frac{i_1}{b_1} = \frac{\dot{Y}_1(0)}{Y_1(0)} = r_1(0), \quad \lambda_2 = \frac{i_2}{b_2} = \frac{\dot{Y}_2(0)}{Y_2(0)} = r_2(0),$$

$$\lambda_2 = \frac{\left[I_2(0) - H(0)\right]\cdot \dot{Y}_2(0)}{Y_2(0)\cdot I_2(0)} = \left[1 - \frac{H(0)}{I_2(0)}\right]r_2(0).$$

Розглянемо тепер кілька задач моделювання ціноутворення. А саме сформулюємо динамічну задачу, яка моделює ринок з прогнозованими цінами. При цьому попит і пропозиція залежить не тільки від ціни товару, а й від її зміни, тобто від похідної.

3.14 Найпростіша динамічна модель з прогнозованими цінами

Задача 14. Нехай комерційний магазин продає товар. Зміна ціни на товар проходить щонеділі. Вказати закон по якому повинна змінюватись ціна на товар, щоб зберігалась рівновага між попитом і пропозицією, якщо попит і пропозиція пропорціійні ціні та тенденції формування ціни в вигляді лінійної функції.

Задачу розв'язати при умові, що в початковий момент часу ціна на товар була 8 грн. за одиницю.

Розв'язування. Відомо, що пропозиція - це товар який є на ринку, або який може бути поставлений на ринок. Попит - необхідність цього товару.

Основним з економічним законом товарного виробництва є закон пропозиції і попиту, який полягає в єдності пропозиції і попиту і їх гармонійний відповідності.

Таким чином, якщо магазин торгує товаром тривалий час з недільними перервами. Тоді недільний попит на товар буде залежати від передбачуваної зміни ціни в наступні тижні.

Якщо в наступаючому тижні, передбачається, що ціна впаде, а в наступні тижні підвищиться, то пропозиція буде стримуватись при умові, що затрати на на зберегання покриються за рахунок передбачуваної високої ціни. При цьому пропозиція товару в найближчий тиждень буде тим меншою, чим більшим передбачається стрибок ціни. І навпаки, якщо в наступаючому тижні ціна буде досить високою, а потім намічається її спад, то пропозиція збільшиться тим більше, чим більшим передбачається падіння ціни надалі.

Якщо позначити через p - ціну на товар в наступаючому тижні, а через $\frac{dp}{dt}$ - тенденцію формування ціни (похідна ціни по часу), то як попит, так і пропозиція будуть функціями від p та $\frac{dp}{dt}$.

Розглянемо найпростіший, а саме - лінійний випадок цієї залежності кожної з функцій:

$$S = a\frac{dp}{dt} + bp + c, \tag{3.74}$$

$$Q = a_1\frac{dp}{dt} - b_1 p + c_1, \tag{3.75}$$

$$(a, b, c, a_1, b_1, c_1 - \text{const}),\ a > a_1,\ a_1 > 0,\ b > 0,\ b_1 > 0.$$

Відмітимо, що коефіцієнт b_1 при $p(t)$ в функції попиту (3.75) від'ємний, а в функції пропозиції (3.74) коефіцієнт a при похідній завжди більший від a_1 в (3.75). Припустимо, що початкова ціна на товар , яка складала 8 грн. за 1 од. через t тижнів була вже $p(t)$ грн. за 1 од., а пропозиція S і попит Q визначились відповідно співвідношеннями:

$$\begin{aligned} S &= 44\frac{dp}{dt} + 2p - 1, \\ Q &= 4\frac{dp}{dt} - 2p + 39, \end{aligned} \tag{3.76}$$

це буде при $a = 44, a_1 = 4, b = 2, b_1 = 2, c = -1, c_1 = 39$.

Тоді для того, щоб попит відповідав пропозиції потрібно виконання рівності:

$$4\frac{dp}{dt} - 2p + 39 = 44\frac{dp}{dt} + 2p - 1\ . \qquad (3.77)$$

З співвідношення (3.77) отримуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dp}{dt} = 10(10 - p). \qquad (3.78)$$

Розділяючи змінні та інтегруючи рівняння (3.78) отримуємо

$$p(t) = -Ce^{-0.1t} + 10.$$

З врахуванням того, що $p(0) = p_0$ при $t = 0$ одержимо

$$p(t) = (p_0 - 10)e^{-0.1t} + 10.$$

А при $p_0 = 8$ будемо мати

$$p(t) = -2e^{-0,10t} + 10.$$

При $p_0 = 12$ одержимо

$$p(t) = 2e^{-0,10t} + 10.$$

Бачимо, що при $t \to \infty$ $p(t) \to 10$ і таким чином є стійкість ринкової ціни. Зауважимо, що в умовах інфляції при $a < a_1$ $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \infty$, тобто рівноважна ціна зростає.

3.15 Задача про динамічну зміну ціни

Задача. 15. На Бесарабскому ринку в момент часу t ціни $p(t)$ залежать від тенденції ціноутворення $p'(t)$, та темпів їх зміни - $p''(t)$. Знайти рівноважну ринкову ціну на деякий товар, якщо попит Q та пропозиції S мають такі залежності від ціни і її похідних

$$Q = ap'' - bp' - cp + d,$$
$$S = a_1p'' + b_1p' + c_1p + d_1,$$

де $a_1 > a$, постійні величини $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$-додатні.

Дослідити розв'язок при $a_1 = 5, a = 4, b_1 = 1, b_2 = 1, c_1 = 4, c = 1, d_1 = 2,$ $d = 10$. Розв'язати відповідну задачу Коші при $t = 0, p(0) = 2, p'(0) = 1$.

Розв'язування. За умовою задачі попит залежить від темпу росту p'', якщо $p'' > 0$, то ринок товар "цікавить", а при $p'' < 0$ не "цікавить". Швидкість зміни ціни p' входить в функцію попиту із знаком мінус тому, що швидке зростання ціни $(p' > 0)$ відлякує покупця. Ясно, що попит спадає при зростанні кількості товару.

Пропозиція підсилюється, темпом росту ціни та швидкістю її зміни. При цьому чим більший темп, тим більша пропозиція товару і тому в функції пропозиції коефіцієнт при p'' більший за відповідний коефіцієнт в функції попиту, а коефіцієнт при p' більший від нуля.

Рівноважна ціна на товар визначається рівністю $Q = S$, звідки

$$(a_1 - a)p'' + (b_1 + b)p' + (c_1 + c)p + d - d_1 = 0.$$

Оскільки $a_1 - a > 0$ за умовою, то маємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, розв'язок якого записується за допомогою відомих формул (див. п.2.5 розділу II) в залежності від коренів характеристичного рівняння.

В нашому випадку маємо диференціальне рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами

$$p'' + 2p' + 5p = 8. \qquad (3.79)$$

Запишемо відповідне характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

корені якого $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2 \cdot i$.

В силу формул (2.14) (2.21), (2.25) можемо записати

$$p_{з.н} = p_{з.о} + p_{ч.н.},$$

де

$$p_{з.о} = e^{-1}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),\ p_{ч.н.} = \frac{8}{5},$$

що остаточно дає

$$p_{ч.н.}\ p(t) = e^{-1}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{8}{5}. \qquad (3.80)$$

Зрозуміло, що при $t \to \infty$ розв'язок прямує до стаціонарного $p_{ст}$, тобто $p(t) \to p_{ст} = \frac{8}{5}$. Таким чином всі інтегральні криві мають горизонтальну асимптоту $p = \frac{8}{3}$ і коливаються навколо неї. Нехай в початковий момент часу $t = 0$ відомі ціна p_0 та тенденція її зміни p_1, тобто

$$p(0) = p_0, \ \ p'(0) = p_1 \ . \qquad (3.81)$$

Підставляючи в (3.81) розв'язок (3.80) знайдемо систему рівняннь для визначення C_1 та C_2.

$$\begin{cases} C_1 - \frac{8}{5} = p_0 \\ -C_1 + C_2 = p_1 \end{cases}.$$

Звідси $C_1 = p_0 - \frac{8}{5}$, $C_2 = p_1 + p_0 - \frac{8}{5}$. Тому розв'язок цієї задачі Коші буде

$$p(t) = e^{-t}\left(\left(p_0 - \frac{8}{5}\right)\cos 2t + \left(p_0 + p_1 - \frac{8}{5}\right)\sin 2t\right) + \frac{8}{5},$$

або

$$p(t) = e^{-t}\sqrt{\left(p_0 + p_1 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(p_0 + p_1 - \frac{8}{5}\right)^2}\ \cos(2t + \theta) + \frac{8}{5}. \qquad (3.82)$$

де

$$\vartheta = \arccos \frac{\left(p_0 - \frac{8}{5}\right)}{\sqrt{\left(p_0 - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(p_0 + p_1 - \frac{8}{5}\right)^2}} \ .$$

Графік зміни ціни на ринку зображено на Рис.12

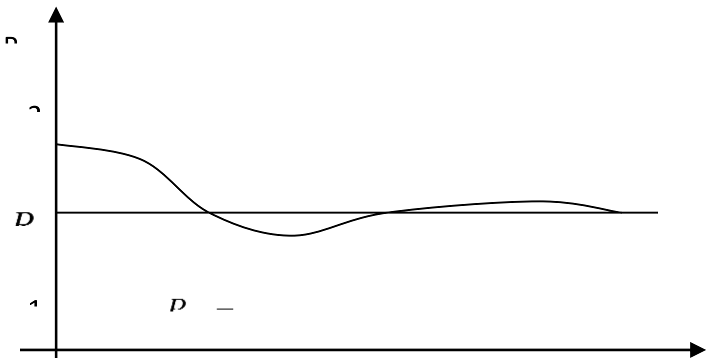


Рис.12

Крива ціни $p(t)$ затухаючи коливаєсь навколо стаціонарної ціни $p_{ст.}$ і з часом встановлюється рівноважна ціна $p = p_{ст.}$.

3.16 Макроекономічні моделі інфляційних процесів Ф. Кейгана*

Одною з головних рушійних сил процесу економічної трансформації є інфляція. Вона постійно змінює ціни і витрати, що змушує національних виробників діяти майже в ринкових умовах, надаючи монополістам можливість безнаказанно збільшувати ціни і прибутки.

Інфляційні очікування – це один з головних факторів інфляційних процесів, і, як наслідок, головний параметр успішної боротьби з інфляцією. Таким чином, проблема формувань інфляції в залежності від інфляційних очікувань є найважливішою в теорії інфляції. Вивчимо її основні моделі.

Можна сказати, що проблема очікувань в макроекономічній теорії є однією з фундаментальних. В широкому сенсі економічна поведінка не є незалежна від майбутнього: в теперішньому економічні агенти реагують на події, які ще не відбулись, але можуть відбутись з деякою ненульовою ймовірністю.

Очікування – це деяка інформація, складена за даними, які в нас є (в майбутньому ми ще не жили).

Заміна очікувань, які мають місце по мірі накопичування інформації, зміні преференцій і уявлень учасників економічного процесу, формують потенціальне джерело макроекономічної динаміки.

____

* Кейган Філіп (1927-2012) – американський економіст

Адаптивні стаціонарні очікування

Побудуємо математичну модель динаміки інфляції, яка розвивається під впливом інфляційних очікувань $\pi(t)$ і змін об'ємів грошової маси $p(t)$. Для моделі стаціонарних очікувань $\pi = \dot{p}$, що означає точне передбачення інфляції ($\dot{p}$ - це фактична інфляція) при нескінченно швидкій адаптації мікро агентів до зміни мікроструктури на мікрорівні.

Рівняння Кейгана має вид: $-a\pi = m^d - p$, де m^d – логарифм попиту на номінальні грошові баланси, $p = \ln\frac{P}{P^*}$ - логарифм рівня цін (наприклад, дефлятор ВВП), P^* - рівноважний рівень цін, $P(t)$ – рівень цін, a – напівеластичність грошового попиту (напівеластичність функції $y(t)$ – це $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}$).

Це рівняння зв'язує інфляцію з рівнем логцін і грошового попиту як це і вимагає монетаристська концепція інфляційного процесу (в ній інфляція породжується тільки ростом грошової маси).

Розв'язком рівняння є функція $p(t) = (P_0 - m^d) \cdot e^{bt} + m^d$, $p(t_0)=P_0$

Якщо $P_0 > m^d$, то з часом p(t) необмежено відхиляється від величини фіксованого грошового попиту m^d, прямуючи в нескінченність. В дійсності такий процес спостерігається на короткому проміжку часу.

Якщо $P_0 < m^d$, то з часом p(t) необмежено зменшуючись, також відхиляється від m^d.

Таким чином, модель інфляції Ф. Кейгана при стаціонарних очікуваннях є нестійкою, що робить проблематичним керування інфляцією і очікування монетарними засобами.

Адаптивні нестаціонарні очікування

В цій моделі інфляції рівняння Кейгана

$$-a\pi = m^d - p$$

доповнюється гіпотезою адаптивних очікувань:

$$\dot{\pi} = \theta(\dot{p} - \pi), \theta > 0,$$

де $\dot{\pi}$ - зміна очікувань, $\dot{p}$ - фактична інфляція, θ - параметр адаптації.

Згідно цій гіпотезі, очікування змінюються у відповідності з адаптивною схемою, тобто зростають, коли фактична інфляція перевищує фактичні очікування і спадають в протилежному випадку. В цьому випадку очікування π(t) нестаціонарні, що й забезпечує стійкість інфляції.

Впевнимось в цьому. Диференціюючи перше рівняння, одержимо систему:

$$\begin{cases} \dot{\pi} = \theta \cdot (\dot{p} - \pi); \\ \pi = \frac{1}{a} \cdot (p - m^d); \\ \dot{\pi} = \frac{1}{a} \cdot p. \end{cases}$$

Виключимо з неї π і $\dot{\pi}$. Для цього друге і третє рівняння підставимо у перше, і одержимо:

$$\dot{p} = \frac{\theta}{1 - a \cdot \theta}(m^d - p), p(0) = P_0$$

Розв'язком даного рівняння буде

$p(t) = \left[P_0 - m^d\right] \cdot e^{-\beta \cdot t} + m^d$, де $\beta = \dfrac{\theta}{1 - a \cdot \theta}$ - параметр швидкої зміни реальних грошових балансів.

При $a \cdot \theta < 1$ незалежно від того, чи $P_0 > m^d$, чи $P_0 < m^d$ спостерігається стійкість розв'язку ($p(t) \to m^d$ при $t \to \infty$).

Це є результат нестаціонарних адаптивних очікувань: якщо на ринку, який знаходиться в рівновазі, грошовий попит зріс в момент t = 0 до величини $m^d>0$, то для відновлення рівноваги попит на реальні грошові баланси повинен впасти, що й відбувається при зростанні цін або при інфляції (зауважимо, що в обох випадках $\dot{p} > 0$)

Модель інфляції для раціональних очікувань

Ця модель ще більш точна, тому що вона враховує коливання, які присутні в реальній інфляції.

Одержимо диференціальне рівняння, що узагальнює модель Кейгана, враховуючи коливання. Будемо вважати, що як і раніше, очікування, ціни і грошовий попит задовольняють рівняння: $-a\pi = m^d - p$

Гіпотеза ефективності грошового ринку , на якому підтримується постійна рівновага ($\dot{p} = \pi$), ослаблюється і замінюється більш реалістичною гіпотезою відновлення ринкової рівноваги з певним часом. Різниця між пропозицією грошей m(t) і попитом на них m^d і є джерелом нестаціонарності очікувань:

$$\dot{\pi} = m - m^d .$$

Крім того, будемо вважати, що агенти на мікрорівні не можуть безпомилково формувати свої очікування не тільки рівнів, але й їх змін – прискорення чи сповільнення – інфляції, тобто: $\pi = \dot{p}$ і $\dot{\pi} = \ddot{p}$, де $\dot{\pi}$- є раціональне очікування, яке на основі інформації про фактичну інфляцію, яка доступна в момент часу *t* відносно змін фактичної інфляції $\ddot{p}(t)$ на момент часу t.

Із системи $\begin{cases} \dot{\pi} = m - m^d \\ -a\pi = m^d - p \end{cases}$ виключаючи m^d знайдемо $\dot{\pi} = m + a\pi - p$, а з врахуванням $\pi = \dot{p}$ і $\dot{\pi} = \ddot{p}$ остаточно одержимо:

$$\ddot{p} = m + a\dot{p} - p, 0 < a < 1 \qquad (3.84)$$

Рівняння (3.84) має вимушуючу силу m(t) (m(t) – логарифм грошової пропозиції). Значення m(t) – це величина, яка стимулюється монетарною політикою. Монетарна політика змінює грошову пропозицію, а значить, ставки проценту і ситуацію на фінансовому ринку в короткостроковому періоді, і рівень цін – в довгостроковому.

Розв'язком рівняння (3.84) буде функція:

$$p(t) = R \cdot e^{\frac{1}{2}at} \cos(\omega t - \varepsilon) + m,$$

де R – амплітуда коливання, ε – його початкова фаза, ω - частота коливань, $\omega = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}$. Постійні R та ε знаходяться з початкових умов: $p(0) = p_0$ і $\dot{\pi} = \ddot{p}$.

Зрозуміло, що при $t \to +\infty$ розв'язок $|p(t)| \to +\infty$. Таким чином, траєкторії поведінки системи для додатних значень зовнішньої сили m, тобто для стимульованої монетарної політики є нестійкими.

Отже, керування інфляцією монетарними засобами в разі лінійної моделі Ф. Кейгана неможливе.

Монетарна політика і стійкість інфляції

Якщо припустити, що мікроагенти формують чекання по принципу π=-m, то тоді відповідні моделі інфляції зводяться до простого гармонічного осцилятора: $\ddot{p} + p = 0$

Оскільки $\dot{p} = \pi$, то розв'язок можна записати у вигляді $\frac{1}{2}p^2(t) + \frac{1}{2}\pi^2(t) = C$, де C – деяка постійна.

Таким чином, фазові траєкторії є кола. Зміна зовнішніх збурень такої системи призводить до зміни постійної C і інфляційний цикл повторюється на іншій стійкій траєкторії. Ця лінійна модель дає приклад інфляційного циклу.

Існує ще один приклад стійкого інфляційного осцилятора:

$$\begin{cases} \dot{p} = \pi \\ \dot{\pi} = m - p - \pi \end{cases} \tag{3.85}$$

Виключаючи $\pi, \dot{\pi}$ з (3.86), одержимо диференціальне рівняння

$$\ddot{p} + \dot{p} + p = m$$

і відповідне йому характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

звідки $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

Загальний розв'язок рівняння (3.85) буде

$$p(t) = R \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} t - \varepsilon) + m$$

В цьому випадку процес стійкий і монетарна політика має істотне значення: вона здатна асимптотично підвищувати (за рахунок m) або понижувати рівень логцін і таким чином стимулювати чи дестабілізувати економіку.

Задача 15. Невідомий корабель виходить із точки О і з постійною швидкістю v рухається в напрямку прямої Оу (рис.13). В той же момент часу ($t = 0$) з точки А , розташованої на відстані ОА=a від корабля, виходить навздогін на перехват прикордонний катер, який пливе з швидкістю, вдвічі переважаючою швидкість корабля. Знайти рівняння описаної катером кривої погоні та мінімальний шлях, необхідний йому щоб наздогнати корабель.

Розв'язування. Позначимо через x та y координати прикордонного катера в момент часу t. Корабель пройшов шлях $OB = vt$ і знаходиться в точці B (рис.13б)). Нехай L - довжина дуги *AC.* Обчислимо кут нахилу дотичної $\frac{dy}{dx}$ в точці C:

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha = -tg\theta = -\frac{|BD|}{|CD|} = -\frac{vt - y}{x} = \frac{y - vt}{x}.$$

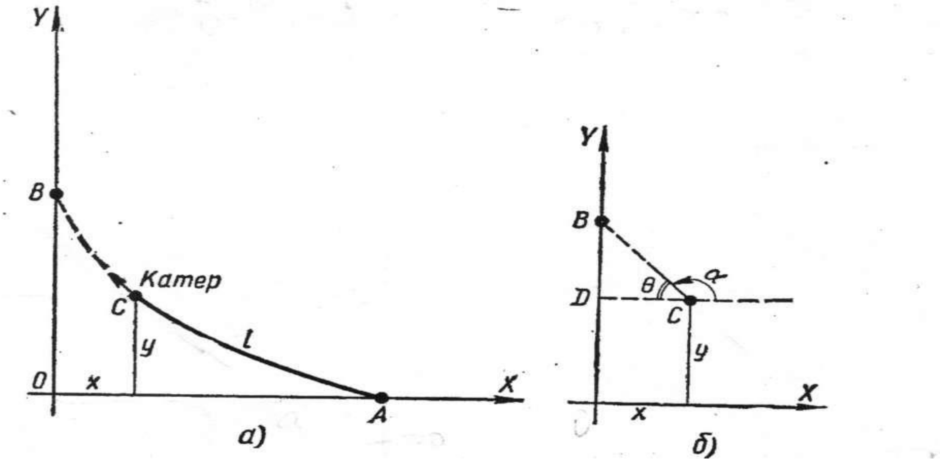


Рис. 13

За умовою задачі, шлях катера за час t : $L = 2vt$.

Тому,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - v\frac{L}{2v}}{x} = \frac{y - \frac{L}{2}}{x},$$

звідки

$$x\frac{dy}{dx} - y = -\frac{L}{2}. \tag{3.86}$$

Оскільки довжина дуги визначається формулою $dL = \sqrt{1 + (y')^2}dx$, то диференціюючи ліву та праву частину рівняння (3.86), одержимо диференціальне рівняння другого порядку:

$$1 \cdot \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{d^2x} - \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dL}{dx} \quad \text{або} \quad x\frac{d^2y}{d^2x} = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Перепишемо його у вигляді $x\frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2}\sqrt{1 + (y')^2}$. Отримали диференціальне рівняння із змінними, що розділяються:

$\frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}dx} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x}$. Звідки, інтегруючи маємо:

$\ln(y' + \sqrt{1+(y')^2}) = -\frac{1}{2}\ln x + C.$

Для знаходження сталої С, використаємо початкові умови задачі: при $t = 0$ $y' = 0$ і $x = a$: $0 = -\frac{1}{2}\ln a + C$, $C = \frac{1}{2}\ln a$.

Тоді $\ln(y' + \sqrt{1+(y')^2}) = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln a = \ln\sqrt{\frac{a}{x}}$,

або

$$y' + \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{a}{x}}. \tag{3.87}$$

Перепишемо останнє співвідношення у вигляді $\frac{1}{y' + \sqrt{1+(y')^2}} = \sqrt{\frac{x}{a}}$.

Помножимо ліву частину рівняння на спряжений вираз, маємо

$$\frac{y' - \sqrt{1+(y')^2}}{(y' + \sqrt{1+(y')^2})(y' - \sqrt{1+(y')^2})} = \sqrt{\frac{x}{a}},$$

Звідки

$$y' - \sqrt{1+(y')^2} = -\sqrt{\frac{x}{a}}. \tag{3.88}$$

Додаючи рівності (3.87) (3.88) одержимо:

$$2y' = \sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a}} \quad \text{і} \quad y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right).$$

Розділяємо змінні $dy = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right)dx$ та інтегруємо:

$$y = \frac{1}{2}\left(\int\sqrt{\frac{a}{x}}dx - \int\sqrt{\frac{x}{a}}\right)dx = \sqrt{ax} - \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} + C_1.$$

Для знаходження сталої C_1, використаємо початкові умови, звідки - $C_1 = \frac{2}{3}a$.

Таким чином, одержимо рівняння руху катера:

$$y = \sqrt{ax} - \frac{x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} + \frac{2}{3}a. \tag{3.89}$$

Прикордонний катер наздоганяє судно при $x = 0$. Шлях, що пройшло судно буде : $y = \frac{2}{3}a$, а шуканий час $t = \frac{y}{v} = \frac{2}{3}\frac{a}{v}$.

Задача 16. Куля входить в брус завтовшки $h = 120$мм (рис. 14) зі швидкістю $v_0 = 200\,\frac{м}{сек}$. Пробивши його, куля вилітає з нього зі швидкістю $v_1 = 60\,\frac{м}{сек}$. Брус затримує рух кулі, сила опору якого пропорційна квадрату швидкості руху кулі. Визначити час руху кулі через брус.

Розв'язування. За умовою задачі сила опору бруса на кулю в довільний момент часу t пропорційна квадрату швидкості і направлена проти руху кулі: $F = -kv^2$.

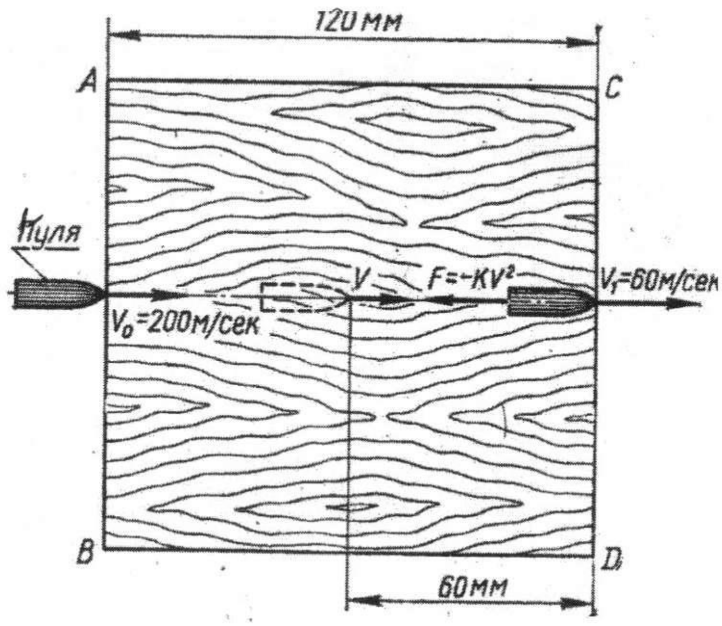


Рис. 14

Згідно 2-го закону Ньютона* сила дорівнює добутку маси точки на прискорення: $F = mw$, де w - прискорення, тому

$$mw = -kv^2. \tag{3.90}$$

Оскільки швидкість і прискорення - відповідно, перша та друга похідні від шляху s по часу t: $v = \frac{ds}{dt}$ $w = \frac{d^2s}{dt^2}$, то одержуємо диференціальне рівняння другого порядку, яке виражає рух кулі в брусі:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \tag{3.91}$$

Дане рівняння не містить явно s (має вигляд неповного лінійного диференціального рівняння другого порядку $y'' = f(y')$, тому можна понизити його порядок. Введемо нову невідому функцію: $y' = p = \frac{dy}{dx}$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$).

Застосовуючи для рівняння (3.91) відповідні заміни: $p = \frac{ds}{dt}, \frac{dp}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, одержимо диференціальне рівняння першого степеня $\frac{dp}{dt} = -\frac{k}{m}p^2$ із змінними, що розділяються.

Тому, $\frac{dp}{p^2} = -\frac{k}{m}dt$ і $-\frac{1}{p} = -\frac{k}{m}t + C_1$.

---

* Ньютон Ісаак (1643-1727) – англійський фізик, математик, механік, астроном

Звідки, враховуючи попередню заміну, маємо: $-\frac{dt}{ds} = -\frac{k}{m}t + C_1$ або $ds = \frac{dt}{\frac{k}{m}t - C_1}$.

Далі інтегруємо

$$s = \frac{m}{k}\int \frac{d(\frac{k}{m}t - C_1)}{\frac{k}{m}t - C_1} = \frac{m}{k}\ln(\frac{k}{m}t - C_1) + C_2. \qquad (3.93)$$

Для відшукання сталих C_1, C_2 використаємо початкові умови: при $t = 0, s = 0$ і при $t = 0, \frac{ds}{dt} = 200\frac{м}{сек}$.

Оскільки, з (3.93)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{k}{m}t - C_1},$$

то, $200 = \frac{1}{\frac{k}{m}\cdot 0 - C_1}$ і $C_1 = -\frac{1}{200}$.

Звідки в силу (3.93): $C_2 = -\frac{m}{k}\ln(\frac{1}{200}) = \frac{m}{k}\ln 200$.

Підставляючи знайдені значення сталих C_1, C_2 в загальний розв'язок (3.93), одержимо частинний розв'язок, який і визначає рівняння руху кулі:

$$s = \frac{m}{k}\ln(\frac{k}{m}t + \frac{1}{200}) + \frac{m}{k}\ln 200 = \frac{m}{k}\ln(200\frac{k}{m}t + 1). \qquad (3.94)$$

Розв'яжемо рівняння (3.94) відносно змінної t: $200\frac{k}{m}t + 1 = e^{\frac{sk}{m}}$,

або

$$t = \frac{m}{200k}(e^{\frac{sk}{m}} - 1). \qquad (3.95)$$

Для знаходження часу за виразом (3.95), потрібно визначити величини m, k. З умови задачі, $s = 12см = 0.12м$, $\frac{ds}{dt} = v_1 = 60\frac{м}{сек}$. З виразу (3.94), запишемо: $\frac{ds}{dt} = (\frac{m}{k}\ln(200\frac{k}{m}t+1))'_t = \frac{200}{200\frac{k}{m}t+1}$.

Використовуючи вираз для часу (3.95), одержимо:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{200}{200\frac{k}{m}(\frac{m}{200k}(e^{\frac{sk}{m}}-1))+1} = \frac{200}{e^{\frac{sk}{m}}}. \tag{3.96}$$

Звідки, $60 = \frac{200}{e^{\frac{0.12k}{m}}}$, $e^{\frac{0.12k}{m}} = \frac{200}{60} = \frac{10}{3}$ і $k = \frac{\ln\frac{10}{3}}{0.12}\cdot m$.

Оскільки числовий вираз $\frac{\ln\frac{10}{3}}{0.12} \approx 10.033$, то $k \approx 10{,}033\cdot m$. У виразі (3.95) наближено замінимо відношення $\frac{k}{m} \approx 10.033$.

Тому час проходження кулі через брус складає:

$$t = \frac{m}{200k}(e^{\frac{sk}{m}}-1) = \frac{1}{200\cdot 10{,}033}(\frac{10}{3}-1) \approx 0.0011628 \text{ (сек)}.$$

Задача 17. Вага льотчика з парашутом m кг. Опір повітря при спуску парашута пропорційний квадрату його швидкості v з коефіцієнтом пропорційності k ($k = 400$).

Знайти швидкість спуску в залежності від часу, визначити максимальну швидкість спуску парашутиста та шлях, який він пройшов за час t.

Розв'язування. В диференціальному рівнянні руху парашутиста $m\frac{dv}{dt} = F$ сила F є рівнодійною двох протилежно направлених сил: ваги, яка дорівнює mg і сили опору повітря $-kv^2$. Тому рівняння спуску парашутиста буде $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$, або,

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2. \tag{3.97}$$

Відокремлюємо змінні $\dfrac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=dt$. Для відшукання інтеграла розкладемо дріб $\dfrac{1}{g-\frac{k}{m}v^2}$ на суму елементарних дробів:

$$\frac{1}{g-\frac{k}{m}v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}}+\frac{1}{\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}}}\right).$$

Маємо,

$$\int\frac{dv}{g-\frac{k}{m}v^2}=\frac{1}{2\sqrt{g}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}}+\frac{1}{\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)dv=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{m}}}\ln(\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}})-\frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{m}}}\ln(\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}})=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{m}}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

Тому,

$$\frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{m}}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}}}=t+C.$$

Якщо $t=0$, то $v=0$ і $C=\dfrac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{m}}}\ln\dfrac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}}=\dfrac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{m}}}\ln 1=0$.

Отже,

$$\frac{1}{2\sqrt{g\frac{k}{m}}}\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}}}=t.$$

Розв’яжемо останнє співвідношення відносно швидкості v як функцію часу:

$$\ln\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}}}=2\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t. \ ,$$

або

$$\frac{\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}}{\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}}}=e^{2\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}.$$

Звідки,

$$\sqrt{g}+v\sqrt{\frac{k}{m}}=(\sqrt{g}-v\sqrt{\frac{k}{m}})e^{2\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}$$

і

$$v(t)=\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cdot\frac{e^{2\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}-1}{e^{2\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}+1}=\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cdot\frac{e^{\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}-e^{-\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}}{e^{2\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}+e^{-\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}}=\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cdot\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t)}{\mathrm{ch}(\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t)}. \qquad (3.98)$$

Замінимо швидкість $v(t)$ на похідну $\frac{ds}{dt}$ запишемо диференціальне рівняння:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cdot\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t)}{\mathrm{ch}(\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t)},$$

інтегруючи яке, маємо:

$$s(t)=\frac{1}{\frac{k}{m}}\ln\mathrm{ch}(\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t)+C_1.$$

Оскільки $s=0$ при $t=0$, то $C_1=0$. Тому

$$s(t)=\frac{1}{\frac{k}{m}}\ln\mathrm{ch}(\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t). \qquad (3.99)$$

Швидкість руху парашутиста, яка визначається рівністю (3.98), має граничне значення

$$v_{\text{гр}}=\lim_{t\to\infty}v(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}\cdot\frac{e^{\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}-e^{-\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}}{e^{2\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}+e^{-\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}}=\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\frac{k}{m}}}.$$

Аналіз формули (3.99) дозволяє зрозуміти характер руху парашутиста. Перепишемо її у вигляді

$$s(t)=\frac{1}{\frac{k}{m}}\ln ch(\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t)=\frac{1}{\frac{k}{m}}\ln\frac{e^{\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}+e^{-\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}}{2}.$$

При невеликих уже значеннях t другий доданок стає досить малим, а отже при всіх t більших деякого певного значення, можна вважати, що шлях

$$s(t)=\frac{1}{\frac{k}{m}}\ln\frac{e^{\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}}{2}=\frac{1}{\frac{k}{m}}(\ln e^{\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t}-\ln 2)=\sqrt{g\frac{k}{m}}\cdot t-\frac{k}{m}\ln 2.$$

Таким чином, одержали лінійну залежність шляху від часу – через деякий рух парашутиста стає з часом практично рівномірним.

3.17. Задачі для самостійного розв’язування

Задача 1. (Зростання інвестицій). Відомо, що швидкість зростання інвестованого капіталу в момент часу t пропорційна величини капіталу $I(t)$ з коефіцієнтом пропорційності k.

Записати задачу Коші, яка описує зростання інвестицій коли відомі в момент $t=t_0$, початкові інвестиції $I._0=2$. Дослідити та зобразити графічно його розв'язок. Зробити аналіз розв’язку.

Задача 2. (Модель природного росту випуску продукції). Відомо, що кількість x виробленої продукції є функція часу $x(t)$. Знайти кількість виробленої продукції за деякий час, якщо вся вироблена продукція реалізована по заданій ціні p, а швидкість її випуску пропорційна інвестиціям з нормою акселерації $\frac{1}{e}$, при умові, що величина інвестицій $I(t)$ пропорційна прибутку від реалізації з нормою інвестиції m $(0<m<1)$. Крім того, знайти частинний розв’язок при $t=0, x(0)=x_0=5$. Дослідити та зобразити графічно його розв'язок. Зробити аналіз розв’язку.

Задача 3. (Модель росту продукції з заданим темпом). Написати диференціальне рівняння відносно функції $y(t)$, яка описує зростання рівня виробництва продукції в момент часу t, якщо темп росту T випуску продукції є заданим числом (T>0) , (час t вимірюється в роках). Знайти його розв'язок та сумарну кількість устаткування виробленого за проміжок часу від t_0 до t_1. Зробити чисельний розрахунок при T = 0.07 (темп росту - 7% річних), та при - $t_0=0, t_1=20$ років.

Задача 4. Задано темп виробництва К деякої продукції $K = 0.02$. Рівень його виробництва за одиницю часу t є функція $y(t)$. Знайти загальну кількість виробленої продукції за час $t = 2$ роки, якщо в початковий момент часу $t = 0$ рівень виробництва $y(0) = 5$. Дослідити та зобразити графічно його розв'язок.

Задача 5. (Закон зміни чисельності населення). Із статистики відомо, що для певного регіону, число новонароджених і число померлих в одиницю часу t пропорційні чисельності населення $x(t)$ з коефіцієнтами пропорційності k_1 та k_2 відповідно. Знайти закон зміни чисельності населення $x(t)$ як функцію часу, враховуючи, що швидкість зміни населення пропорційна його чисельності, а початкова величина населення - $x(0) = 18{,}25$ млн.чол. Описати демографічний процес при різних значеннях параметрів k_1 та k_2 (t в роках). Дослідити та зобразити графічно його розв'язок.

Задача 6. (Найпростіша модель зростання валового національного продукту). Відомо, що ріст валового національного продукту $y(t)$ в момент t підпорядковується принципу акселератора $y'(t) = \left(\frac{1}{b}\right) \cdot I(t)$, де b - коефіцієнт капіталоємності, а $I(t)$ виробничі інвестиції (загальний об'єм). Враховуючи, що інвестиції пропорційні $y(t)$ з нормою інвестицій m, записати диференціальне рівняння, яке описує ріст ВНП і розв'язати його при початковій умові $y(0) = y_0$ Дослідити якісну картину розв'язку.

Задача 7. (Визначення функції попиту). Відомо, що еластичність попиту кількості товару x по ціні p за кожну одиницю товару $E_p(x) = \frac{x^2 + b}{x}$. Знаючи, що еластичність визначається за формулою $E = \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$, знайти функцію попиту на цей товар при $p = 1, x = 4$. Дослідити розв'язок при різних b $(b = 4; b = -4)$.

Задача 8. (Модель зміни кількості покупців на ринку) . Нехай на Володимирському ринку продається певний товар, про який в момент часу t із N числа бажаючих його купити, знає лише $x(t)$ покупців. Відомо, що після реклами (по радіо, оголошеннях, телебаченню, швидкість зміни покупців, які знають про цей товар, $x'(t)$ пропорційна числу поінформованих і непоінформованих покупців з коефіцієнтом $\mathbf{k}$.

Скласти диференціальне рівняння зміни кількості покупців $x(t)$, якщо в початковий момент (до реклами) про цей товар знали лише $\frac{N}{n}$ покупців; тобто $x(0) = \frac{N}{n}$. Дослідити та зобразити графічно його розв'язок.

Задача 9. Для макроекономічної моделі динаміки Харрода-Домара* прибуток задовольняє задачі Коші

$$by'(t) = y(t), y(0) = y_0.$$

Знайти динаміку прибутку y(t), якщо його початкове значення $y_0 = 2$. Проаналізувати розв`язок для різних значень темпу приросту b (b>0, b<0, b=0)

Задача 10. (**Модель динамічної рівноваги в економіці).** Нехай в моделі макроекономічної динаміки Харрода-Домара

$$B\frac{dY(t)}{dt} = Y(t) - C(t), C(t) = e^{\alpha t},$$

B-неперервний темп приросту, $Y(0) = Y_0$ Знайти розв`язок цього лінійного рівняння при $Y_0 = 2, \alpha = 4, B = 1$. Дослідити його.

Задача 11. (Зростання випуску продукції в умовах конкуренції).

Відомо, що при надлишку вироблених товарів на ринку ціна є функцією від кількості товару P(x), а функція росту продукції $x(t)$ задовольняє диференціальному рівнянню

$$x'(t) = \alpha P(x) \cdot x,$$

де- $\alpha = e \cdot m, m$- норма інвестиції, $\frac{1}{e}$- норма акселерації.

Розв'язати диференціальне рівняння при умові, що ціна лінійно залежить від кількості продукції (товару), тобто $P(x) = a - bx, \quad a > 0, \quad b > 0.$ Побудувати графік розв'язку при $a > 0, b > 0, x(0) = x_0$ та при $a = 5, \ b = 1, \ x(0) = 3$.

Задача 12. (Динамічна модель Кейнса). Відомо, що національний доход дорівнює $Y(t) = S(t) + I(t) + E(t)$, де $S(t)$- споживання, $I(t)$- інвестиції, $E(t)$- державні витрати, є функціями часу t. Вважаючи, що $I(t) = K(t)Y(t)'$, $S(t) = a(t)Y(t) + b(t);$ а функції $E(t), a(t), K(t), b(t)$ - відомі, записати

---

* Харрод Рой (1900-1978), Домар Овсій (1914-1997) – американські економісти

диференціальне рівняння для національного доходу $Y(t)$ і розв'язати його при постійних $a(t)=a, K(t)=k, b(t)=b, E(t)=E,$ та при початковій умові $Y(0)=Y_0$. Дослідити одержаний розв'язок також при $b(t)=e^{rt}$.

Задача 13. Розв`язати диференціальне рівняння макроекономічної динаміки

$$3\frac{dY(t)}{dt}=Y(t)+\alpha t, y(0)=y_0,$$

методом варіації довільної сталої. Дослідити розв’язок при $\alpha>3$ та $\alpha<3$.

Задача 14. Розв`язати диференціальне рівняння макроекономічної динаміки

$$\frac{dY(y)}{dt}=\frac{1}{2}Y(t)+a+bt, Y(0)=y_0,$$

методом варіації довільної сталої. Дослідити розв’язок при $b>2$ та $b<2$.

Задача 15. Нехай в моделі макроекономічної динаміки Харрода-Домара

$$B\frac{dY(t)}{dt}=Y(t)-S(t),$$

B- заданий темп приросту, а $S(t)=e^{\alpha t}$. Знайти розв`язок цього лінійного рівняння при $Y(0)=Y_0$. Дослідити його при $Y_0=2,\ \alpha=4,\quad B=1.$

Задача 16. Знайти розв`язок диференціального рівняння доходу першого порядку (модель Харрода-Домара)

$$\frac{dY(t)}{dt}=\frac{1}{B}Y(t)+S(t),\quad Y(0)=y_0$$

з показником споживання $\mathbf{S(t)=e^{rt}}$, темпом приросту $\frac{1}{B}=3$. Дослідити розв’язок при $\frac{1}{B}>r$ та при $\frac{1}{B}<r$.

Задача 17. Розв`язати задачу Коші для диференціального рівняння (модель Харрода-Домара)

$$\frac{2dY(t)}{dt}=Y(t)+\alpha t^2, y(0)=y_0 .$$

Дослідити розв`язок при $\alpha>2$ та $\alpha<2$.

Задача 18. (Модель імпортування капіталу). Нехай виробничі інвестиції $I(t)$ формуються за рахунок двох джерел - частки **і** власного валового національного продукту (ВНП) $y(t)$, та імпортованого капіталу (або допомоги МВФ) в об'ємі $H(t)$ тобто: $I(t) = iy(t) + H(t)$. На основі принципу акселератора написати диференціальне рівняння, що описує ріст ВНП $y(t)$ країн, які розвиваються. Розв’язати його при $H(t) = \alpha e^{\lambda t}$, де λ - темп приросту ВНП країн МВФ, α - доля ВНП. Дослідити розв'язок при початковій умові $y(0) = y_0$.

Задача 19. (Найпростіша модель динамічної зміни ціни на ринку). Припустимо, що на Володимировському ринку в момент часу t ціни $x(t)$ залежать від тенденції ціноутворення $x'(t)$, та темпів їх зміни - $x''(t)$. Знайти рівноважну ринкову ціну на деякий товар, якщо попит Q та пропозиції S мають такі залежності від ціни і її похідних

$$Q = ax'' - bx' - cx + d;$$

$$S = a_1 x'' + b_1 x' + c_1 x + d_1,$$

де $a_1 > a$, постійні величини $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ -додатні.

Дослідити розв'язок при $a_1 = 5, a = 4, b_1 = 1, b_2 = 1, c_1 = 4, c = 1, d_1 = 2, d = 10$. Розв'язати відповідну задачу Коші при $t = 0, x(0) = 2, x'(0) = 1$.

Задача 20. На ринку Оболонь ціни на овочі змінюються щоденно. Вказати закон, по якому повинна змінюватись ціна на овочі, щоб зберігалась рівновага між попитом та пропозицією, якщо $x(t)$- ціна на овочі за 1 кг. на наступний день, $x'(t)$-тенденція формування ціни, а зв'язок між ціною та тенденцією для функції попиту Q і пропозиції S лінійний, тобто:

$$S = ax' + bx + c,$$

$$Q = a_1 x' - b_1 x + c_1.$$

Вважаємо, що $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ додатні постійні величини та $a > a_1$. Задачу розв'язати при умові, що ціна на овочі була 10 грн. за 1 кг. при $t = 0$. Дослідити розв'язок при $a = 20, a_1 = 10, b_1 = b_2 = 2, c_1 = 1, c = 40$.

Задача 21. На Куренівському ринку в момент часу t ціни $x(t)$ залежать від тенденції ціноутворення $x'(t)$, та темпів їх зміни - $x''(t)$. Знайти рівноважну ринкову ціну на деякий товар, якщо попит Q та пропозиції S мають такі залежності від ціни і її похідних

$$Q = ax'' - bx' - cx + d;$$

$$S = a_1 x'' + b_1 x' + c_1 x + d_1,$$

де $a_1 > a$, постійні величини $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ -додатні.

Дослідити розв'язок при $a_1 = 6, a = 5, b_1 = 1, b_2 = 1, c_1 = 4, c = 1, d_1 = 2, d = 10$. Розв'язати відповідну задачу Коші при $t = 0,\ x(0) = 3,\ x'(0) = 2$.

Задача 22. Нехай комерційний овочевий магазин продає овочі. Зміна ціни на них проходить щонеділі. Вказати закон по якому повинна змінюватись ціна на овочі, щоб зберігалась рівновага між попитом і пропозицією, якщо попит і пропозиція пропорціійні ціні та тенденції формування ціни в вигляді лінійної функції.

Задачу розв'язати при умові, що в початковий момент часу ціна на овочі була 15грн. за кілограм.

Задача 23. Відомо, ціна певного товару в момент часу t складає $p(t)$. Попит та пропозиція дорівнюють $Q(p) = a - bp + c\dfrac{dp}{dt}$ та $S(p) = dp + e + k\dfrac{dp}{dt}$. Знайти функцію ціни $p(t)$ в точці ринкової рівноваги. Дослідити при яких значеннях параметрів a, b, c, d, e, k задача має економічний смисл. Розв'язати задачу Коші при умові $p(0) = 2$ грн., та при $a = 70, b = 5, c = 10, d = 6, e = 1, k = 20$.

Задача 24. Прибуток P від виробництва та реалізації певної продукції є функцією її обсягу. Знайти залежність між величиною прибутку та обсягом продукції, якщо відомо, що граничний прибуток складає r процентів від середнього прибутку.

Задача 25. Відомо, що швидкість амортизації обладнання внаслідок його зношення пропорційна в кожний момент часу його фактичній вартості. Знайти функцію вартості обладнання через t років. Розв'язати відповідну задачу Коші при умові, якщо початкова вартість обладнання складає 30 млн.грн.

Задача 26. Нехай динаміка інфляції $\dot{p}$ і очікування π представлена системою:

$$\begin{cases} \dot{p} = \pi \\ \dot{\pi} = b - a_2 p - a_1 \pi \end{cases}$$

Для цієї системи:

- Скласти фазову діаграму і знайти точку рівноваги;
- За характеристичними коренями знайти фазові траєкторії і стійкість точки рівноваги.

Задача 27. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння інфляції $\ddot{p} + a_1\dot{p} + a_2 p = b$ у вигляді $p(t) = R \cdot \exp(-\dfrac{a_1 t}{2})\cos(\omega t + \varepsilon) + \dfrac{b}{a_2}$

Задаючи початкові умови $p(0), \dot{p}(0)$ знайти дві константи інтегрування A_1=Rcos ε і A_2=Rsin ε.

Задача 28. Розв'язати рівняння інфляції $\dot{p} = r \cdot p - p^3$ (як рівняння Бернуллі)

- Знайти аналітичний розв'язок.
- Дослідити його асимтотику при $t \to \infty$.
- Знайти точки рівноваги.
- Дослідити точки рівноваги на стійкість.
- Дослідити, що при r=0 відбувається біфуркація системи.

Задача 29. Відомо, що ріст кількості бактерій в посудині задовольняє рівнянню $y' = k \cdot y \cdot (b - a \cdot y), k \cdot b = 0{,}1$. Знайти функцію росту бактерій, якщо в початковий момент часу кількість бактерій досягне 60% від максимального рівня.

Задача 30. Функції попиту і пропозиції на певний товар мають вигляд: $x = c_i + b_i p + a_i \dfrac{dp}{dt}$, де i=1,2. Знайти залежність рівноважної ціни від часу t, якщо відомо, що при t=0 ціна $p(0)=p_0$. Знайти також розв'язок при $t \to \infty$. Встановити, чи буде рівноважна ціна стійкою? Побудувати графік.

1. $c_1=45$, $b_1=-2$, $a_1=-4$, $p(0)=10$;
   $c_2=60$, $b_2=2$, $a_2=-5$;
2. $c_1=35$, $b_1=-1$, $a_1=-4$, $p(0)=6$;
   $c_2=25$, $b_2=1$, $a_2=2$;
3. $c_1=100$, $b_1=-1$, $a_1=-2$, $p(0)=4$;
   $c_2=145$, $b_2=1$, $a_2=-3$;
4. $c_1=56$, $b_1=-6$, $a_1=6$, $p(0)=6$;
   $c_2=60$, $b_2=-2$, $a_2=4$;
5. $c_1=15$, $b_1=2$, $a_1=6$, $p(0)=10$;
   $c_2=60$, $b_2=-2$, $a_2=4$.

Задача 31. Чисельність населення y(t) деякого міста задовольняє диференціальному рівнянню $\dfrac{dy}{dt} = 0{,}01 \cdot y \cdot (1 - 10^{-5} y)$, *t* – в роках. В початковий момент часу місто населяло $y(0)=y_0=1000$ чол. Встановити, через скільки років чисельність населення міста виросте в 6 разів?

Задача 32. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Нехтуючи опором повітря, визначити його рух.

Задача 33. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю 800 м/сек під кутом 45 градусів до горизонту. Нехтуючи опором повітря, визначити найбільшу висоту, на яку підніметься снаряд та місце його падіння.

Список використаної та рекомендованої літератури

1. Борисейко В.О., Данилов В. Я., Левчук В. В., Мартиненко В. С. Конспект лекцій з курсу "Вища математика". Тема: " Диференціальні рівняння":. К. : КДТЕУ, 1994.- 33с.
2. Васильченко І.П., Данилов В.Я., Лобанов А.І., Таран Є.Ю. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. Навчальний посібник: Книга 2. К.: Либідь, 1994.-280с.
3. Грисенко М.В. Математика для економістів. Методи і моделі, приклади і задачі. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. К.: Либідь, 2007.-720с.
4. Данилов В.Я., Данилов Вол.Я. Диференціальні рівняння та їх застосування в мекономіці. Навчальний посібник з вищої математики. К.:Видавництво КІБС, 2004, -84 с.
5. Еругин Н.П. и др. Курс обыкновенных диференциальных уравнений. К.: Вища школа, 1974.-472с.
6. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемних Ю. Н. Математитеческие методы в экономике: Учебник.- М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, Из-во “ДИС”, 1997. –368с.
7. Карасев А. И., Аксютина З. М., Савельева Т. И. Курс высшей математики для экономических вузов.:М.: Высш. Школ., 1982.- ч. 1,2.
8. Кулініч Г.Л., Таран Є.Ю., Бурим В.М., Гординський Л.Д. , Харкова М.В., Данилов В.Я. Вища математика: спеціальні розділи : Книга 2. / За ред. Кулініча Г.Л. - К.: Либідь, 2003.- 368с.
9. Коршунова Н., Плясунов В. Математика в экономике. Учебное пособие. - М.: Вита - Пресс -, 1996. – 368с.
10. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник. - М.: Инфра-М. -, 1998. – 464с.
11. Кремер Н.Ш., Путна Б. А., и др. Высшая математика для экономистов: Учебн. Пособие для ВУЗов. М.: Юнити, 1997.- 439с.
12. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. Підручник. – 2-ге вид. перероб. і доп. – К.: Либідь, 2003. – 600с.
13. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения примеры и задачи.К.: Вища школа, 1984.-408с.
14. Солодовников А. С. , Бабайцев В. А. , Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике: Учебник: Ч. 2.- М.: Финансы и статистика, 1999. – 375с.