МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський державний університет харчування та торгівлі

М. С. Софронова

МАТЕМАТИКА В ЕКОНОМІЦІ

Вища та прикладна математика

Навчальний посібник

Харків
ХДУХТ
2018

УДК 51:33 (075)
ББК 22.1+65
С68

Рецензенти:
д-р техн. наук, професор, проф. кафедри обліку та інформаційних технологій Харківського торговельно-економічного інституту Київського національного торговельно-економічного університету М. С. Синєкоп,
канд. фіз.-мат. наук, доцент, доц. кафедри фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін Харківського державного університету харчування та торгівлі Д. О. Торяник

Рекомендовано до видання вченою радою ХДУХТ
протокол № 14 від 06.07.18 р.

С68 **Софронова М. С.** Математика в економіці. Вища та прикладна математика [Електронний ресурс] : навч. посібник / М. С. Софронова. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2018. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

ISBN

Навчальний посібник містить теоретичні відомості з основних розділів курсу вищої та прикладної математики для економічних спеціальностей. У посібнику наявна достатня кількість задач економічного змісту, які розв'язуються за допомогою математичного апарату, наводяться завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів економічних спеціальностей університетів та економічних навчальних закладів вищої освіти.

УДК 51:33 (075)
ББК 22.1+65

ISBN

ПЕРЕДМОВА

Діяльність в будь-якій галузі економіки (управлінні, фінансово-кредитній сфері, маркетингу, обліку, аудиті) значною мірою пов'язана із застосуванням в економічній науці й практиці математичних методів дослідження.

Мета курсу математики в системі підготовки економіста – засвоєння необхідного математичного апарату, який допомагає аналізувати, моделювати й вирішувати прикладні економічні задачі.

Математичний стиль мислення, вміння міркувати точно, в логічній послідовності край необхідні майбутнім економістам. Тому курс математики в ЗВО відіграє винятково важливу роль у підготовці фахівців. Посилення впливу математики на розвиток науки й виробництва, розширення сфери використання математичних знань, процес математизації основних напрямів діяльності людини значно підвищують значення повноцінної освіти для кожного студента. У зв'язку із цим математична освіта майбутніх економістів повинна розглядатися як важлива складова базової вищої освіти.

Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз тощо є фундаментом математичної освіти економіста. У цьому посібнику містяться основні теоретичні відомості – визначення і формули, а також формулювання необхідних положень, на які потрібно опиратися, розв'язуючи задачі, зокрема економічні; як приклади наводяться економічні задачі, які вирішуються за допомогою математичного апарату, даються завдання для самостійної роботи й питання для самоперевірки.

Запропонований посібник, на думку авторів, повинен сприяти глибокому розумінню основ дисципліни математики, надбанню досвіду використання математичних методів для моделювання економічних процесів та їх аналізу, створити передумови для налагодження міждисциплінарних зв'язків. Навчальний посібник розраховано на студентів економічних спеціальностей.

Тема 1. Елементи математичного моделювання в економіці

Однією з центральних проблем, що вирішуються сучасною наукою, є проблема управління. Особливо гостро стоїть ця проблема в економічній науці. Суб'єкт управління виділяє ряд явищ в якості економічних, визначаючи, таким чином, об'єкт економічного управління. Об'єктом економічного управління є економічний процес. Економічний процес є послідовність економічних явищ, в той час як, для суб'єкта економічного управління, він постає як сукупність економічних задач. Управління є процес прийняття рішень. Таким чином, проблема управління є проблема «зворотного зв'язку» – рішення повинні бути адекватні тому, відносно чого вони приймаються. Рішення економічної задач передбачає наявність деякого методу її розв'язання. Цей метод визначається застосованою в кожному конкретному випадку економічною моделлю. У разі економічного управління (управління в економіці) ця проблема може бути описана як проблема відповідності економічних моделей економічному процесу.

Для вивчення різних економічних явищ економісти використовують їх спрощені формальні описи, названі економічними моделями. Прикладами економічних моделей є: моделі споживчого вибору, моделі фірми, моделі економічного зростання, моделі рівноваги на товарних, факторних і фінансових ринках тощо. Будуючи моделі, економісти виявляють істотні фактори, що визначають досліджуване явище і відкидають деталі, несуттєві для вирішення поставленої проблеми. Формалізація основних особливостей функціонування економічних об'єктів дозволяє оцінити можливі наслідки впливу на них і використовувати такі оцінки в управлінні. Суттєвим моментом економічної експертизи є побудова математичної моделі економічного об'єкта.

Математична модель економічного об'єкта – це його відображення у вигляді сукупності рівнянь, нерівностей, логічних відносин, графіків. Відносини елементів досліджуваного об'єкта відображаються (відтворюються) в аналогічних відносинах елементів моделі. Таким чином, модель – це умовний образ об'єкта, побудований для спрощення його дослідження. Передбачається, що вивчення моделі дає нові знання про об'єкт, або дозволяє визначити найкращі рішення в тій чи іншій ситуації.

СХЕМА МАТЕМАТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕКОНОМІЧНОЇ ЗАДАЧІ

ЕКОНОМІЧНА ЗАДАЧА
↓
МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА
↓
МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ
↓
ПРОЦЕС РОЗВ'ЯЗАННЯ
↓
ЕКОНОМІЧНЕ ТРАКТУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТУ

Економічна задача являє собою деяку економічну модель даного економічного процесу; *математична постановка* даної економічної моделі – ставиться у відповідність деяка математична модель, тобто дана економічна модель інтерпретується у вигляді математичної задачі; *метод розв'язання* – мається на увазі вибір методу розв'язання задачі, виходячи з аналізу математичної задачі; *процес розв'язання* – точне і послідовне застосування, обраного методу розв'язання; *економічне трактування результату* – економічне тлумачення чисельного результату, отриманого в результаті розв'язання математичної задачі.

Питання до теми 1.

Що таке управління в економіці? 2. Що таке економічна модель? 3. Що таке математична модель? 4. Чому необхідне використання математики в економіці? 5. Опишіть схему математичного розв'язання економічної задачі.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 2. Матриці та визначники

Довільна сукупність чисел $a_{11}, \ldots, a_{mn}$, розміщена у вигляді прямокутної таблиці, що містить *m* рядків і *n* стовпців, називається *матрицею* (або *матрицею з розміром* $m \times n$) і позначається

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Число a_{kp} називають елементом матриці, який розташований в *k*-му рядку і *p*-му стовпці.

Дві матриці *A* і *B* називають *рівними*, якщо $a_{kp} = b_{kp}$, $k = \overline{1,m},\ p = \overline{1,n}.$ Якщо число рядків і стовпців матриці рівні, то матрицю називають квадратною, а число $m = n$ називають її порядком. Множина елементів квадратної матриці, для яких k = р, називається *головною діагоналлю* матриці *A*, тобто це $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.

Якщо число стовпців матриці *A* дорівнює одиниці, тоді така матриця називається *матрицею-стовпцем* та записуємо так

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Аналогічно матриця розміру $1 \times n$, тобто *матриця-рядок*, позначається

$$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Матриця *B* називається *транспонованою* по відношенню до матриці *A*, якщо $b_{kp} = a_{pk},\ p = \overline{1,n}, k = \overline{1,m}.$ При цьому транспоновану матрицю позначають символом A^T, а операцію переходу від матриці *A* до матриці A^T називають *транспонуванням*.

Розглянемо дві матриці *A* і *B* одинакового розміру $m \times n$ та визначимо операцію їх додавання.

Сумою матриць *A* і *B* називається матриця $C = A + B$, елементи якої

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Добутком числа λ на матрицю *A* називається матриця $C = \lambda A = A\lambda$, елементи якої $c_{ij} = \lambda a_{ij} = a_{ij}\lambda.$

Для будь-яких матриць *A, B, C* розміру $m\times n$ та будь-яких чисел λ, μ мають місце такі властивості:

1. $A + B = B + A$;
2. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
5. $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$;
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
7. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Матриця *C* називається *добутком матриці A* розміру $m\times s$ і матриці *B* розміру $s\times n$, якщо її елементи визначаються формулою

$$c_{kp} = \sum_{j=1}^{S} a_{kj} b_{jp}, \quad (k = \overline{1, m},\ p = \overline{1, n}).$$

Позначення: $C = AB$.

Зазначимо, що добуток *AB* є визначеним для тих матриць, у яких кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*.

Матриця *E* називається *одиничною*, якщо для будь-якої матриці *A* має місце рівність

$$AE = EA = A.$$

Даному означенню відповідає лише одна матриця

$$E = \begin{pmatrix} 100\ldots\ldots\ldots0 \\ 010\ldots\ldots\ldots0 \\ 000\ldots\ldots\ldots1 \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо деякі властивості добутку матриць:

1. $A(BC) = (AB)C$;
2. $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$;
3. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Квадратна матриця *B* називається *оберненою* по відношенню до матриці *A*, якщо

$$AB = BA = E.$$

Обернена матриця до *A* позначається символом A^{-1}. Обернені матриці мають такі властивості:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;   2. $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

З квадратною матрицею пов’язане таке поняття, як визначник (детермінант). Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність обчислене певним способом число, яке називається *визначником* цієї матриці, й позначається таким чином:

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначником n-го порядку, що відповідає матриці A, називається алгебраїчна сума $n!$ доданків ($n! = 1\cdot 2\cdot 3\ \dots(n-1)\ n$), кожен з яких є добутком n елементів матриці A, узятих по одному з кожного рядка й кожного стовпця. Таким чином, визначник першого порядку $|a_{11}| = a_{11}$ – це сам елемент a_{11}.

Визначник другого порядку є число, що дорівнює

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}.$$

Визначник третього порядку – це число, яке одержуємо як результат суми шести доданків, тобто

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Існують правила, які полегшують обчислення визначників 3-го порядку. Одне з них – *правило Саррюса* – таке: знизу приписується ще така ж матриця й обчислюються всі можливі добутки елементів по діагоналях: зверху вниз добутки беруться зі знаком «+», знизу вверх – зі знаком «–». Наприклад:

$$|B|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(0\cdot 2\cdot 4)+(-1)\cdot 3\cdot(-2)+(2\cdot 1\cdot 3)-(-2\cdot 2\cdot 2)-$$

$$-(0\cdot 3\cdot 3)-(-1\cdot 1\cdot 4)=24.$$

Обчислення визначників 4-го та наступних порядків можна звести до обчислення визначників 3-го порядку.

Якщо в матриці A викреслити k-й рядок і p-й стовпець, одержимо матрицю $(n-1)$-го порядку; визначник цієї матриці називається *мінором* елемента a_{kp} визначника матриці A і позначається M_{kp}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{kp} визначника матриці *A* називається добуток $(-1)^{k+p}$ на мінор $(n-1)$ порядку M_{kp}:

$$A_{kp} = (-1)^{k+p} M_{kp}, \quad (k, p = \overline{1, n}).$$

Сформулюємо властивості визначника *n*-го порядку.

1. Визначник не змінюється при транспонуванні, тобто $det(A) = det(A^T)$.
2. При перестановці двох стовпців визначник змінює знак.
3. Визначник із двома однаковими стовпцями дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи *p*-го стовпця визначника *D=det(A)* мають вигляд:

$a_{kp} = \lambda b_k + \mu c_k, \quad k = \overline{1, n},$ де λ, μ – довільні числа, має місце формула:

$$D = \lambda D_p(b_k) + \mu D_p(c_k),$$

де $D_p(c_k)$ – визначник, що одержують із визначника *D* заміною *k* елементів *p*-го стовпчика елементами C_k.

5. Спільний множник всіх елементів деякого стовпця визначника можна винести за знак визначника.

6. Якщо деякий стовпець складається із елементів, що дорівнюють нулю, визначник також дорівнює нулю.

7. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з його стовпців додати відповідні елементи будь-якого іншого стовпця, помножені на деяке число.

8. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kp} A_{kp}, \quad p = \overline{1, n}.$$

9. Сума добутків елементів будь-якого стовпця визначника $|A|$ на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kp} A_{ki} = 0 \ (i \neq p).$$

Властивості 2-9 правильні також для рядків визначника.

Зазначимо, що властивість 8 дає змогу обчислювати визначник для матриці будь-якого порядку шляхом поступового зниження цього порядку аж до третього.

Теорема 1. Якщо *A*, *B* – будь-які матриці *n*-го порядку, то

$$det(AB) = det(A)\, det(B).$$

Квадратна матриця *A* називається *невиродженою*, якщо $det(A) \neq 0$. У виродженої матриці визначник дорівнює нулю ($det(A) = 0$).

Теорема 2. Щоб для матриці A існувала обернена, необхідно і достатньо, щоб вона була невиродженою.

Нехай дано невироджену матрицю A. Тоді елементи оберненої матриці $B = A^{-1}$ обчислюються за формулою:

$$b_{kp} = \frac{A_{kp}}{det(A)}, \quad (k, p = \overline{1,n}),$$

де A_{kp} – алгебраїчне доповнення елемента a_{kp} матриці A^T.

Зазначимо, що визначник оберненої матриці дорівнює оберненому значенню визначника матриці A:

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший порядок мінора матриці, відмінний від нуля.

Приклад. Із матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

можна скласти чотири мінори третього порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Неважко помітити, що один із мінорів другого порядку

$$N_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, \text{ тобто } r(A) = 2.$$

Елементарними перетвореннями над матрицями називають прості перетворення, які виконують над рядками (чи стовпцями) матриці без зміни її рангу. Це дає змогу більш легким шляхом визначити ранг матриці без складання всіх мінорів. Елементарними перетвореннями над рядками матриці є такі:

1) перестановка двох рядків;
2) добуток рядка на довільне число $\lambda \neq 0$;
3) додавання до будь-якого рядка відповідних елементів іншого, помножених на ненульове число λ;
4) викреслення нульового рядка.

Наведені елементарні перетворення над рядками стосуються також стовпців.

Питання до теми 2

1. Що таке матриця, її розмір? 2. Які види матриць бувають? 3. Що таке ранг матриці? 4. Що називають елементарними перетвореннями матриці? 5. Які дії можливі над матрицями? 6. Що таке визначник матриці? 7. Як обчислюються визначники другого і третього порядків? 8. Якими властивостями визначника користуються при обчисленнях?

Тема 3. Матриці та визначники в економіці

Поняття матриці і заснований на ньому розділ математики – матрична алгебра – мають велике значення для економістів, основна частина математичних моделей економічних об'єктів і процесів записується в простій і компактної матричної формі. За допомогою матриць зручно описувати різні економічні закономірності.

Матриці – це спосіб зберігання, передачі і обробки інформації. Будь-яка таблиця, з якою доводиться мати справу в побутовій або професійної діяльності, може бути представлена в матричному вигляді, що допускає виконання різноманітних дій і дозволяє звести громіздкі обчислення до компактної і зручної форми.

Наприклад, таблиця розподілу ресурсів по окремих галузях економіки

Ресурси	Галузі економіки	
	промисловість	сільське господарство
Електроенергія	5,7	7,8
Трудові ресурси	2,9	3,7
Водні ресурси	6,9	5,1

може бути записана в компактній формі у вигляді матриці розподілу ресурсів по галузям:

$$A = \begin{pmatrix} 5,7 & 7,8 \\ 2,9 & 3,7 \\ 6,9 & 5,1 \end{pmatrix}$$

У цьому запису, наприклад, матричний елемент a_{11}=5,7 показує, скільки електроенергії споживає промисловість, а елемент a_{22}=3,7 − скільки трудових ресурсів споживає сільське господарство.

Розглянемо ще одним приклад використання матриць в економіці: так звану технологічну матрицю. Нехай підприємство з m видів ресурсів виробляє n видів продукції. Припустимо, що для виробництва однієї одиниці (од.) j-го виду продукції витрачається a_{ij} од. i-го виду ресурсу, тобто a_{ij} – норма витрати i-го ресурсу на виробництво j-й продукції. Матриця $A=(a_{ij})$ розміру $m\times n$, складена з норм витрати, називається матрицею норм витрати. Технологічною ж її називають ось чому. Розглянемо який-небудь, наприклад, j-й, стовпець цієї матриці. Цей стовпець повністю описує витрату ресурсів на виробництво 1 од. j-й продукції. Говорячи абстрактно, для отримання 1 од. j-й продукції треба «змішати» a_{1j} од. 1-го ресурсу, a_{2j} од. 2-го ресурсу тощо. Таке «змішування» цілком правильно назвати технологією переробки ресурсів. Таким чином, j-й стовпець матриці A описує j-у технологію переробки ресурсів.

За допомогою дій над матрицями можна визначати обсяг продукції, що випускається за певний період часу, виручку, витрати, вартість ресурсів тощо.

Приклад 1. Два комбінату випускають чотири види м'ясної продукції. У матрицях поквартальних випусків за один звітний день A_k (де k – номер кварталу на рік) елементи a_{ij} представляють обсяги випуску на i-му комбінаті j-го виду продукції:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 45 & 78 & 50 & 53 \\ 64 & 60 & 25 & 60 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 50 & 75 & 55 & 53 \\ 50 & 60 & 35 & 66 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 59 & 55 \\ 45 & 60 & 45 & 70 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 53 & 62 & 65 & 56 \\ 40 & 60 & 50 & 72 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю річного випуску продукції і матриці приросту обсягів виробництва за кожен квартал, проаналізуємо отримані результати.

Розв’язання.

1. Матриця річного випуску продукції визначається сумою матриць поквартальних випусків A_1, A_2, A_3, A_4:

$$V = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \begin{pmatrix} 45 & 78 & 50 & 53 \\ 64 & 60 & 25 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 & 75 & 55 & 53 \\ 50 & 60 & 35 & 66 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 50 & 60 & 59 & 55 \\ 45 & 60 & 45 & 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 53 & 62 & 65 & 56 \\ 40 & 60 & 50 & 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 198 & 275 & 229 & 217 \\ 199 & 240 & 155 & 268 \end{pmatrix}.$$

2. Приріст продукції у ІІ кварталі визначається різницею матриць A_2, A_1:

$$G_1 = A_2 - A_1 = \begin{pmatrix} 50 & 75 & 55 & 53 \\ 50 & 60 & 35 & 66 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 & 78 & 50 & 53 \\ 64 & 60 & 25 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 & 0 \\ -14 & 0 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приріст продукції у ІІІ кварталі визначається різницею матриць A_3, A_2:

$$G_2 = A_3 - A_2 = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 59 & 55 \\ 45 & 60 & 45 & 70 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 & 75 & 55 & 53 \\ 50 & 60 & 35 & 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 4 & 2 \\ -5 & 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приріст продукції у IV кварталі визначається різницею матриць A_4, A_3:

$$G_3 = A_4 - A_3 = \begin{pmatrix} 53 & 62 & 65 & 56 \\ 40 & 60 & 50 & 72 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 & 60 & 59 & 55 \\ 45 & 60 & 45 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Результати обчислень дозволяють зробити висновок про те, що в цілому на обох комбінатах спостерігається збільшення випуску продукції. Але при цьому на першому комбінаті обсяги випуску продукції другого виду у ІІ та ІІІ кварталах зменшилися, а в четвертому – обсяг виріс. На другому комбінаті обсяг випуску першого виду з кожним кварталом зменшувався, а обсяг другого виду продукції протягом всього року був однаковим.

Приклад 2. Молокозавод виробляє чотири види йогурту, обсяги випуску якого задані матрицею A=(40 10 20 15). Реалізація продукції проводиться в трьох магазинах. Ціна реалізації одиниці i-го виду йогурту в j-му магазині задана матрицею

$$B=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&3\\2&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю виручки по магазинах і визначимо, який з них найбільш вигідний для реалізації товару.

Розв'язання.

Для знаходження матриці виручки по магазинах необхідно обчислити добуток матриць $A\cdot B$. Ця операція можлива, оскільки матриця $A_{1\times 4}$ узгоджена з матрицею $B_{4\times 3}$ ($A_{1\times 4}\cdot B_{4\times 3}=C_{1\times 3}$):

$$A\cdot B=(40\quad 10\quad 20\quad 15)\cdot\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&3\\2&4&3\\1&3&4\end{pmatrix}=(165\quad 175\quad 230).$$

Найбільш вигідним для реалізації товару є третій магазин, в якому виручка від реалізації товару складе 230 грош. од.

Приклад 3. Швейний цех за місяць на пошиття двох видів штор, обсяг випуску яких становить 240 і 310 м, використовує три види матеріалів. Норми витрати матеріалів на одиницю кожного виду виробу та ціна матеріалу наведені у таблиці. Уявімо дані задачі в матричному вигляді і знайдемо матрицю повних витрат за матеріалами кожного виду і повну вартість всього матеріалу за місяць

Вид матеріалу	Витрати на виріб, м		Ціна матеріалу, ден. од.
	1	2	
1	3	2	21
2	2	1	18
3	1	3	20

Розв'язання.

1. Норми витрат i-го виду матеріалу на пошиття штори j-го виду представимо матрицею

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\\1&3\end{pmatrix},$$

обсяг випуску штор кожного виду за місяць – матрицею

$$B=\begin{pmatrix}240\\310\end{pmatrix},$$

а вартість одного метра матеріалу кожного виду – матрицею

$$B = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 20 \end{pmatrix}.$$

2. Для знаходження матриці повних витрат за матеріалами кожного виду необхідно обчислити добуток матриць A і B. Ця операція можлива, оскільки матриця $A_{3\times 2}$ узгоджена з матрицею $B_{2\times 1}$ ($A_{3\times 2} \cdot B_{2\times 1} = C_{3\times 1}$):

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1340 \\ 790 \\ 1170 \end{pmatrix}.$$

3. Для знаходження матриці повної вартості всього матеріалу необхідно обчислити добуток матриць *P* і *AB*. Ця операція можлива, оскільки матриця $P_{1\times 3}$ узгоджена з матрицею $(A \cdot B)_{3\times 1}$ $\left(P_{1\times 3} \cdot (A \cdot B)_{3\times 1} = C_{1\times 1}\right)$:

$$P \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 310 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 18 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1340 \\ 790 \\ 1170 \end{pmatrix} =$$

=65760 (*грош. од.*)

Іншими прикладами використання матриць в економіці можуть бути такі:
– матриця Томпсона і Стрікленда;
– SPACE-матриця оцінки стратегічного положення і дій компанії;
– аналіз кривої життєвого циклу інформаційної продукції і послуг;
– аналіз портфеля інформаційної продукції і послуг на основі:
— матриці «зростанн –частка ринку» (БКГ-матриця);
— матриці «привабливість–конкурентоспроможність» (матриця McKincey);
— тривимірної схеми Абеля тощо.

Тобто загальні витрати підприємства, вартість одиниці сировини тощо описуються лінійними алгебраїчними виразами, які аналізуються і розв’язуються за допомогою матриць і визначників. Також теорія матриць і визначників широко застосовується у математичному прогнозуванні цін тощо.

Завдання для самостійного розв’язання

1. В таблиці вказано кількість одиниць продукції, що відвантажується щодня на молокозаводах 1 і 2 до магазинів M_1, M_2, M_3, причому доставка одиниці продукції з кожного молокозаводу до магазина M_1 коштує 50 грош. од., до магазину M_2 – 70, а до M_3 – 130 грош. од. Підрахувати щоденні транспортні витрати кожного заводу.

Молокозавод	Магазин		
	M_1	M_2	M_3
1	20	35	10
2	15	27	8

2. Підприємство виробляє три типи продукції, використовуючи п'ять видів ресурсів. Норми затрат ресурсу *i*–го товару на виробництво одиниці продукції *j*–го типу задані матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Нехай за визначений відрізок часу підприємство виробило кількість продукції кожного типу, яка задана матрицею

$$X = \begin{pmatrix} 275 \\ 148 \\ 356 \end{pmatrix},$$

а вартість кожного виду ресурсів в розрахунку на одиницю у вигляді матриці

$$P = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 76 & 100 & 95 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

а) S – матрицю повних затрат ресурсів кожного виду на виробництво всієї продукції за певний період;

б) C – повну вартість усіх витрачених ресурсів за певний період.

3. Підприємство виробляє чотири типи продукції, обсяги виробництва яких задаються матрицею A. Ця продукція реалізується в п'яти регіонах. Вартість реалізації відповідної одиниці продукції у певному регіоні задана матрицею В:

$$A = \begin{pmatrix} 420 & 350 & 780 & 205 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 6 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти C – матрицю виручки по регіонах.

Відповіді. 1. 1 – 4750 грош. од, 2 – 3680 грош. од. **2.** а) $S = \begin{pmatrix} 4836 \\ 3761 \\ 1523 \\ 4374 \\ 4258 \end{pmatrix}$, б) *C*=1228998 грош.од. **3.** $C = \begin{pmatrix} 7495 & 4605 & 6210 & 10770 & 10670 \end{pmatrix}$.

Тема 4. Системи лінійних рівнянь

Розглянемо систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими

$$Ax = B,$$

де *A* – матриця розміром $m\times n$ з коефіцієнтами при невідомих, які позначаються буквою a_{ij} з двома індексами (перший індекс означає порядковий номер рівняння системи, а другий збігається з індексом невідомого); *x* – матриця-рядок – невідомі; *B* – матриця-стовпець – вільні члени.

В загальному вигляді систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими зручно записувати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Система рівнянь з відмінними від нуля вільними членами називається *неоднорідною*. Система, в якій вільні члени дорівнюють нулю, є *однорідною*.

Неоднорідна система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б одне розв’язання. Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називаються, відповідно, матрицею системи і розширеною матрицею системи.

Теорема 3 (теорема Кронекера-Капеллі). Неоднорідна система лінійних рівнянь сумісна тоді, коли $r(\overline{A}) = r(A)$.

Зауважимо, що однорідна система рівнянь завжди сумісна.

Розв’язання систем лінійних рівнянь зводиться до ряду перетворень рівнянь даної системи, внаслідок чого система набирає такого вигляду, що її розв’язки можна знайти безпосередньо. Такі перетворення здійснюються за допомогою двох операцій: множення рівнянь на число та додавання рівнянь.

Нову систему, яку одержують за допомогою лінійних перетворень від заданої, називають *вихідною* заданої. Розглянемо деякі методи розв’язування систем рівнянь.

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з таким самим числом n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

причому детермінант, що складається з коефіцієнтів при невідомих, відмінний від нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажемо, що запропонована система має єдиний розв’язок, який можна знайти за допомогою детермінантів. Для цього з системи побудуємо таку вихідну систему, щоб кожне її рівняння містило лише одне якесь невідоме x_j.

Для цього помножимо 1-ше рівняння системи на алгебраїчне доповнення A_{1j}, друге – на A_{2j} тощо. Нарешті n-не рівняння – на A_{nj}, а потім всі знайдені рівняння додамо. Групуючи члени з одним і тим самим невідомим (ці члени стоять в одному й тому ж стовпчику в системі), знайдемо

$$x_1\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{kj} + x_2\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{kj} + \dots + x_j\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} + \dots + x_n\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}.$$

Як відомо, сума попарних добутків елементів деякого стовпця на алгебраїчні доповнення цих елементів дорівнює детермінанту Δ. Але сума попарних добутків алгебраїчних елементів цього стовпця на відповідні елементи іншого стовпця дорівнює нулю. Тому в останній рівності коефіцієнти всіх невідомих, крім коефіцієнта при x_j, дорівнюють нулю. Коефіцієнт при x_j дорівнює детермінанту системи Δ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} = \Delta$$

У правій частині рівності стоїть аналогічна сума, але в ній елементи j –го стовпця замінено відповідними вільними членами. Таким чином, права частина рівності є детермінант, утворений з детермінанта Δ системи заміною j –го стовпця на стовпець вільних членів. Позначимо його через Δ_j і запишемо рівняння коротко:

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j.$$

Виконавши такі лінійні перетворення системи для j = 1, 2,…, n, дістанемо вихідну систему

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_n \end{cases}$$

Поділивши тепер всі рівняння нової системи на Δ, одержимо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots\dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Одержані рівності являють собою, з одного боку, вихідну систему, знайдену лінійними перетвореннями заданої системи. З другого боку, ці рівності одразу вказують на числові значення кожного з невідомих, тобто на розв’язок системи. Одержані формули для невідомих називаються *формулами Крамера.*

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1}, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

За допомогою лінійних перетворень цієї системи можна завжди побудувати еквівалентну їй систему лінійних рівнянь з трикутною матрицею (*метод Гаусса*):

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1,n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2,n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{n-1,n-1}x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = b_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Розв’язання одержаної системи, очевидно, вже не становить труднощів. Визначивши з останнього рівняння x_n і підставивши його в попереднє, знайдемо x_{n-1}. Далі аналогічно визначаємо x_{n-2} тощо. Процес виконання лінійних перетворень для переходу від заданої системи до трикутної називають *прямим ходом*. Визначення значень невідомих з трикутної системи називають *оберненим ходом*. Від заданої системи до трикутної переходять поступово, послідовно виключаючи невідомі і будуючи ряд допоміжних систем.

Коефіцієнти із рівнянь заданої системи ділимо на коефіцієнти при x_1. Візьмемо для прикладу перше рівняння і поділимо його на a_{11} (вважаємо, звичайно, що $a_{11} \neq 0$). Тоді дістанемо

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1,n-1}}{a_{11}}x_{n-1} + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Перемножуючи це рівняння по черзі на a_{21}, a_{31},…, $a_{n-1,1}$, a_{n1} і віднімаючи результат відповідно від 2-го, 3-го,…, (n – 1)-го, n-го рівнянь, матимемо систему такого вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{n-1,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(1)}x_n = b_{n-1}^{(1)}, \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}^{(1)}x_{n-1} + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}. \end{cases}$$

де $a_{1i}^{(1)} = \dfrac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad b_1^{(1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}}, \quad (i = 2, 3, \ldots, n),$

$$a_{ki}^{(1)} = a_{ki} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} \cdot a_{k1}, \quad b_k^{(1)} = b_k - \frac{b_1}{a_{11}} \cdot a_{k1}, \quad (i, k = 2, \ldots, n).$$

Легко зрозуміти, що остання система еквівалентна заданій. Це випливає хоча б ізр того, що не лише остання система є вивідною з заданої, а й, навпаки, задану систему можна розглядати як вивідну для останньої.

Далі, з останніх (n – 1) рівнянь з (n – 1) невідомими останньої системи, аналогічно до попередньої, виключаємо невідоме x_2. Тоді таким самим способом виключаємо послідовно і невідомі x_3, x_4,…, x_{n-1}, x_n. В результаті дістанемо систему лінійних рівнянь із трикутною матрицею, де коефіцієнти $c_{kk} = 1$, $k = 1, 2,\ldots, n$.

Питання до теми 4

1. Що називають розв'язком системи рівнянь? 2. Яку систему рівнянь називають сумісною (несумісною)? 3. Які умови сумісності системи рівнянь? 4. Яку систему рівнянь називають визначеною (невизначеною)? 5. Які умови визначеності (невизначеності) системи рівнянь? 8. Опишіть методу Крамера. 9. В чому полягає метод Гаусса?

Тема 5. Економічні задачі, що зводяться до розв'язання систем лінійних рівнянь

Розглянемо приклади економічних задач, що зводяться до системи лінійних рівнянь.

Приклад 1. З деякого листового матеріалу необхідно викроїти 360 заготовок типу *A*, 300 заготовок типу *B* і 675 заготовок типу *C*. При цьому можна застосовувати три способи розкрою. Кількість заготовок, яку одержано з кожного листа при кожному способі розкрою, зазначено в таблиці:

Тип заготівки	Спосіб розкрою		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Записати в математичній формі умови виконання завдання.

Розв'язання.

Позначимо через *x, y, z* кількість листів матеріалу, що розкроїли відповідно першим, другим і третім способами. Тоді при першому способі розкрою *x* листів буде отримано $3x$ заготовок типу *A*, при другому – $2y$, при третьому – *z*. Для повного виконання завдання по заготівлях типу *A* сума $3x + 2y + z$ повинна дорівнювати 360, тобто

$$3x + 2y + z = 360.$$

Аналогічно одержуємо рівняння

$$x + 6y + 2z = 300,$$
$$4x + y + 5z = 675,$$

яким повинні задовольняти невідомі *x, y, z* для того, щоб виконати завдання по заготівлях *B* і *C*. Отримана система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 360, \\ x + 6y + 2z = 300, \\ 4x + y + 5z = 675, \end{cases}$$

виражає в математичній формі умови виконання всього завдання по заготівлях *A*, *B* і *C*.

Матриця даної системи – квадратна, якщо її визначник не дорівнює нулю, то дану систему можна вирішити, наприклад, методом Крамера. Обчислимо визначник матриці системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 67.$$

Тому система має єдиний розв'язок. Обчислюємо $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 360 & 2 & 1 \\ 300 & 6 & 2 \\ 675 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 6030, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 360 & 1 \\ 1 & 300 & 2 \\ 4 & 675 & 5 \end{vmatrix} = 1005,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 360 \\ 1 & 6 & 300 \\ 4 & 1 & 675 \end{vmatrix} = 4020.$$

Звідси $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{6030}{67} = 90, \ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1005}{67} = 15, \ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{4020}{67} = 60.$

Таким чином, при виконанні завдання по заготівлях буде використано 90 листів матеріалу при першому способі розкрою, 15 аркушів матеріалу при другому способі розкрою і 60 листів матеріалу при третьому способі розкрою.

Приклад 2. Швейна фабрика протягом трьох днів виготовляла плащі, костюми і куртки. Відомі обсяги випуску продукції за три дні та грошові витрати на виробництво за ці дні:

День	Об'єм випуску продукції (одиниць)			Витрати (грош. од.)
	плащі	костюми	куртки	
Перший	25	35	20	16800
Другий	10	50	30	17600
Третій	20	40	30	18400

Знайти собівартість одиниці продукції кожного виду.

Розв'язання.

Позначимо через x_1, x_2, x_3 відповідно собівартість плаща, костюма та куртки. Згідно з поданою таблицею складемо систему рівнянь для знаходження невідомих x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} 25x_1 + 35x_2 + 20x_3 = 16800, \\ 10x_1 + 50x_2 + 30x_3 = 17600, \\ 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 = 18400. \end{cases}$$

Розв’яжемо дану систему методом Гаусса. Випишемо розширену матрицю системи і виконаємо над нею потрібні перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 35 & 20 & 16800 \\ 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 20 & 40 & 30 & 18400 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 25 & 35 & 20 & 16800 \\ 20 & 40 & 30 & 18400 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 0 & -90 & -55 & -27200 \\ 0 & -60 & -30 & -16800 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 0 & 2 & 1 & 560 \\ 0 & -90 & -55 & -27200 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 50 & 30 & 17600 \\ 0 & 2 & 1 & 560 \\ 0 & 0 & -10 & -2000 \end{array}\right).$$

За отриманою розширеною матрицею випишемо відповідну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 10x_1 + 50x_2 + 30x_3 = 17600 \\ \qquad 2x_2 + x_3 = 560 \\ \qquad\quad -10x_3 = -2000. \end{cases}$$

З останнього рівняння цієї системи знаходимо, що $x_3 = 200$;
з другого –

$$x_2 = \frac{1}{2}(560 - x_3) = \frac{1}{2}(560 - 200) = 180;$$

з першого –

$$x_1 = \frac{1}{10}(17600 - 50x_2 - 30x_3) = \frac{1}{10}(17600 - 50 \cdot 180 - 30 \cdot 200) = 260.$$

Отже, собівартість плаща становить 260 грош. од., костюма – 180 грош. од., куртки – 200 грош. од.

Міжгалузевий баланс (метод «витрати–випуск») – економіко-математична балансова модель, яка характеризує міжгалузеві виробничі взаємозв’язки в економіці країни. Характеризує зв’язки між випуском продукції в одній галузі і витратами, витрачанням продукції всіх учасників галузей, необхідним для забезпечення цього випуску.

Міжгалузевий баланс представляється у вигляді системи лінійних рівнянь. Він являє собою таблицю, в якій відображено процес формування і використання сукупного суспільного продукту в галузевому розрізі. Таблиця показує структуру витрат на виробництво кожного продукту і структуру його розподілу в економіці. По стовпцях відображається вартісний склад випуску, по рядках – напрямки використання ресурсів кожної галузі.

Математична модель міжгалузевого балансу.

Відомою є модель міжгалузевого балансу, розроблена професором В. Леонтьєвим.

Приклад 3. Нехай дана балансова модель «витрати–випуск» (Леонтьєва) X = AX + Y. Знайти вектор кінцевої продукції Y при заданому X, де $$A=\begin{pmatrix}0,1 & 0 & 0,6\\ 0 & 0,7 & 0,2\\ 0,7 & 0,1 & 0,1\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}100\\ 200\\ 150\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.
Маємо:

$$Y = (E - A)\,X,$$

де E – одинична матриця третього порядку.

$$E-A=\begin{pmatrix}0,9 & 0 & -0,6\\ 0 & 0,3 & -0,2\\ -0,7 & -0,1 & 0,9\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$Y=\begin{pmatrix}0,9 & 0 & -0,6\\ 0 & 0,3 & -0,2\\ -0,7 & -0,1 & 0,9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 200\\ 150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,9\cdot 100+0-0,6\cdot 150\\ 0+0,3\cdot 200-0,2\cdot 150\\ -0,7\cdot 100-0,1\cdot 200+0,9\cdot 150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 30\\ 45\end{pmatrix}.$$

Також потрібно зауважити, що системи лінійних рівнянь широко використовуються при розв'язанні оптимізаційної задачі складання оптимального плану.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Нехай a_{ij} – кількість продукції j, виробленої підприємством i, а b_i – вартість всієї продукції підприємства і досліджуваної галузі. Значення a_{ij} і b_i задані матрицями A і B відповідно. Потрібно визначити ціну одиниці продукції кожного виду, виробленої підприємствами галузі.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 14 & 7\\ 12 & 12 & 7\\ 9 & 13 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}97\\ 129\\ 109\end{pmatrix}.$$

2. Працівникам заводу за трьома категоріями виплатили премію готівкою такими купюрами як 100 грн – 30 купюр, 500 грн – 70 купюр, 1000 грн – 50 купюр. Причому, І категорії видали 1000 грн, ІІ категорії – 2000, ІІІ категорії – 3000. Потрібно визначити, скільки співробітників кожної категорії працює на підприємстві, якщо кожному працівникові заробітну плату видали мінімальним числом купюр.

3. На двох пунктах відправлення $П_1$ і $П_2$ зосереджено відповідно 350 і 150 одиниць деякої продукції, яку потрібно відправити двом споживачам C_1 і C_2. Споживачі потребують

відповідно 200 і 300 одиниць цієї продукції. Відомі витрати на перевезення одиниці продукції з пункту $П_i \left(i=1, 2\right)$ до споживача $C_j \left(j=1, 2\right)$, які подані у таблиці.

Пункт відправлення	Витрати на перевезення одиниці продукції до споживачів (грош. од.)	
	C_1	C_2
$П_1$	15	20
$П_2$	8	25

Потрібно скласти план перевезень так, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною.

Відповіді. 1. (5; 4; 3). **2.** (10; 10; 10). **3.** Від $П_1$ до C_1 потрібно перевезти 50 од. продукції, від $П_1$ до C_2 – 300 од. і від $П_2$ до C_1 – 150 од. Мінімальна вартість перевезень – 7950 грош.од.

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 6. Вектори. Скалярний, векторний та мішаний добутки

Вектором називається напрямлений відрізок. Вектор позначається так: $\overline{a} = \overline{AB}$, точка *A* – початок вектора, точка *B* – його кінець. Для позначення кінця вектора використовується стрілка (рис. 6.1).

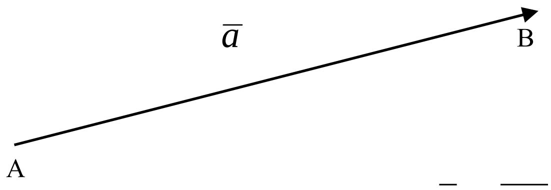

Рисунок 6.1 – Вектор $\overline{a} = \overline{AB}$

Два вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній або паралельних прямих.

Модулем (*довжиною*) вектора $\overline{AB}$, називається довжина відрізка *AB*, тобто відстань між його початком *A* і кінцем *B*. Для модуля вектора вживається позначення $\left|\overline{AB}\right|$ і $\left|\overline{a}\right|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одиничним* вектором або *ортом*.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові напрямі і рівні модулі. Для кожного вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ існує *протилежний вектор* $-\overline{a} = -\overline{AB}$, який має таку ж довжину, але протилежний напрямок (рис. 6.2).

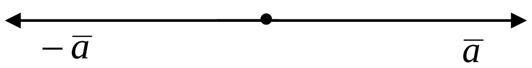

Рисунок 6.2 – Протилежні вектори

Вектори можна додавати, віднімати і множити на число.

Сумою векторів $\overline{AB}$ і $\overline{BC}$ є вектор $\overline{AC}$, який сполучає початок вектора $\overline{AB}$ з кінцем вектора $\overline{BC}$ при умові, що вектор $\overline{BC}$ відкладемо від кінця вектора $\overline{AB}$, тобто

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Це правило додавання векторів називається «*правилом трикутника*» (рис. 6.3).

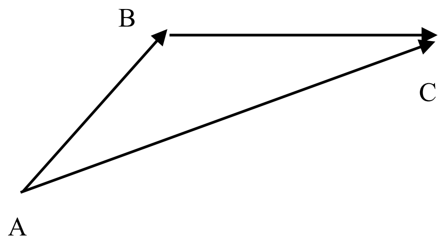

Рисунок 6.3 – «Правило трикутника»

При додаванні протилежних векторів $\overline{a}$ і $\overline{-a}$ одержуємо *нуль-вектор* $\vec{0}$, тобто

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0},$$

модуль якого дорівнює нулю.

Суму двох векторів можна одержати за «*правилом паралелограма*», яким зручно користуватись для векторів зі спільним початком (рис. 6.4).

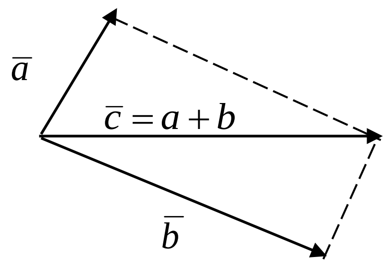

Рисунок 6.4 – «Правило паралелограма»

Різницею двох векторів $\bar{a} - \bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$, який в сумі з вектором $\bar{b}$ дає вектор $\bar{a}$:

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}, \quad \text{тобто} \quad \bar{b} + \bar{c} = \bar{a}.$$

Щоб від вектора $\bar{a}$ відняти вектор $\bar{b}$, досить до вектора $\bar{a}$ додати вектор $-\bar{b}$, протилежний вектору $\bar{b}$.

Добутком вектора $\bar{a}$ *на число* λ називається вектор $\lambda\bar{a} = \bar{a}\lambda$, що:

а) є колінеарним вектору $\bar{a}$;

б) має модуль $|\bar{a}\lambda|$, що дорівнює добутку $|\bar{a}||\lambda|$ модулів вектора $\bar{a}$ і числа λ;

в) має напрям, що збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$, або протилежний йому, якщо $\lambda < 0$.

Проекція вектора $\overline{AB}$ *на вісь l* називається число, яке позначається пр$_l\,\overline{AB}$ і дорівнює

$$\text{пр}_l\,\overline{AB} = |AB|\cos\varphi,$$

де φ – кут між вектором $\overline{AB}$ і віссю *l* ($0 \le \varphi \le \pi$).

Розглядаючи вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ на координатній площині *xOy,* можемо записати його проекції на вісі *Ox* і *Oy* відповідно a_x, a_y.

Ці проекції будемо називати *координатами вектора* $\bar{a}$ та позначати $\bar{a} = (a_x,\ a_y)$ або $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j}$ ($\bar{i}$, $\bar{j}$ – орти (одиничні вектори) відповідно осей $Ox,\ Oy$). Нагадаємо, що модуль вектора $\bar{a}$ через координати a_x і a_y знаходиться за формулою $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Векторним n-вимірним простором називається множина *n*-вимірних векторів, для яких визначені операції додавання один з одним і множення на число – скаляр. Ці операції підпорядковані певним аксіомам.

Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається добуток їх модулів на косинус кута між ними.

Позначимо скалярний добуток векторів як $\overline{a}\cdot\overline{b}$ *або* $\left(\overline{a},\overline{b}\right)$, а кут між ними – $\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right)$. Тоді

$$\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right).$$

Скалярний добуток підпорядковується таким законам:

а) $\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{b},\overline{a}\right)$ – комутативний закон;

б) $\lambda\left(\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\lambda\overline{a},\overline{b}\right)=\left(\overline{a},\overline{b}\right)\lambda$ – асоціативний закон відносно скалярного множника;

в) $\left(\overline{a}+\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\overline{c}\right)+\left(\overline{b},\overline{c}\right)$ – дистрибутивний закон.

В координатній формі скалярний добуток записується так $\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x b_x+a_y b_y$. Кут між двома векторами знаходиться за формулою $cos\,\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}$. Умовою ортогональності двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є $a_x b_x+a_y b_y=0$, а умовою колінеарності $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}$.

Векторний добуток двох векторів

Векторним добутком $\overline{a}\times\overline{b}=\left[\overline{a},\overline{b}\right]$ вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ називають третій вектор $\overline{c}$, який перпендикулярний до векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і утворює з ними праву трійку. Це означає, що коли вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ прикладемо до однієї точки, то спостерігач, який стоїть на площині векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ головою в напрямі до третього вектора, бачить обертання першого вектора $\overline{a}$ до другого вектора $\overline{b}$ навколо їх спільного початку через менший за абсолютною величиною з утворених ними кутів, як обертання проти годинникової стрілки.

Модуль (*довжина*) векторного добутку дорівнює добутку модулів векторів, що перемножуються, і синуса кута між ними, тобто площі паралелограма, побудованого на цих векторах, як на сторонах, а саме

$$\left[\overline{a}\times\overline{b}\right]=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\sin\left(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}\right).$$

Векторний добуток підпорядковується таким законам:

а) $\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = -\left[\bar{b}, \bar{a}\right]$ – антикомутативний закон;

б) $\lambda\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \left[\lambda\bar{a}, \bar{b}\right] = \left[\bar{a}, \lambda\bar{b}\right] = \left[\bar{a}, \bar{b}\right]\lambda$, де λ – скаляр, асоціативний закон відносно скалярного множника;

в) $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ – дистрибутивний закон.

В координатній формі векторний добуток записується

$$\left[\bar{a}, \bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів

Добуток $\left(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}\right)$, де вектор $\bar{a}$ помножено на $\bar{b}$ векторно, а одержаний векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ помножено на $\bar{c}$ скалярно, називають *мішаним добутком* трьох векторів. Використовують ще позначення $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \left(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}\right)$.

Якщо $\left(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}\right) = 0$, то три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ паралельні одній площині і називаються компланарними.

При відомих координатах векторів $\bar{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\bar{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$, $\bar{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$ мішаний добуток можна записати визначником

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ чисельно дорівнює об’єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$.

Питання до теми 6

1. Що називається вектором? 2. Які операції над векторами вам відомі? 3. Що називають скалярним добутком двох векторів? 4. Що називають векторним добутком двох векторів? 5. Які умови колінеарності та компланарності двох векторів? 6. Що називають мішаним добутком трьох векторів?

Тема 7. Використання векторної алгебри в економіці

Економічною ілюстрацією n-вимірного векторного простору є простір економічних благ (товарів). *Вектор цін і вектор набору товарів* – це вектори n-вимірного простору.

В економічних задачах можна розглядати скалярний добуток вектора цін p на вектор обсягу проданих товарів x. Скалярний добуток px в цьому випадку дає сумарну вартість проданих товарів х при цінах p.

Під товаром розуміється деяке благо або послуга, що надійшли в продаж в певний час і в певному місці. Будемо вважати, що є n різних товарів, кількість i-го товару позначається x_i, тоді деякий набір товарів позначається $X = (x_1, x_2,..., x_n)$, тобто є n-вимірним вектором. Будемо розглядати, як правило, тільки невід'ємні кількості товарів, так, що для будь-якого $i = 1, 2,..., n$, $x_i \geq 0$ або $X \geq 0$. Множина всіх наборів товарів називається *простором товарів*.

Надалі припускаємо, що кожен товар має ціну. Усі ціни припускаються строго додатними. Нехай ціна одиниці i-го товару є c_i, тоді вектор $C = (c1, c2,\ldots, c_n)$ є вектор цін.

Вектор цін має таку ж саму вимірність, що і вектор набору товарів. Для набору товарів $X = (x1, x2,\ldots, x_n)$ і вектору цін $C = (c1, c2,..., c_n)$ їх скалярний добуток $CX = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ є число, що називається *ціною набору товарів* або його *вартістю*.

Індекс споживчих цін характеризує зміни у часі загального рівня цін на товари та послуги, які купує населення для невиробничого споживання. Введемо позначення $\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ – вектор обсягу споживчих товарів. Тоді індексом цін (у відсотках) називається величина, що обчислюється за формулою

$$p = \frac{\overline{c} \cdot \overline{q}}{\overline{c}_0 \cdot \overline{q}} \cdot 100,$$

де $\overline{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ – вектор цін у поточному місяці, $\overline{c_0} = (c_{01}, c_{02}, ..., c_{0n})$ – вектор цін у попередньому місяці. Звідси $100 \cdot \overline{c} \cdot \overline{q} = p \cdot \overline{c}_0 \cdot \overline{q}$, або $(100 \cdot \overline{c} - p \cdot \overline{c}_0) \cdot \overline{q} = 0$, тобто індекс можна визначити як числовий коефіцієнт p, який робить вектор $\overline{q}$ перпендикулярним до вектора $(100 \cdot \overline{c} - p \cdot \overline{c}_0)$.

Індекс інфляції обчислюється за формулою

$$i = p - 100.$$

До того ж,

$$i = \frac{\overline{c} \cdot \overline{q}}{\overline{c}_0 \cdot \overline{q}} \cdot 100 - 100 = 100 \cdot \left(\frac{(\overline{c} - \overline{c}_0) \cdot \overline{q}}{\overline{c}_0 \cdot \overline{q}} \right).$$

Приклад 1. Нехай завод виробляє чоловічі, жіночі та дитячі велосипеди. Тоді обсяг його виробництва V за рік можна записати як вектор $V = (M, L, K)$, де M – обсяг виробництва за рік чоловічих велосипедів, L – жіночих, K – дитячих. Нехай обсяг виробництва в 2017 р був $V_{17} = (1000, 800, 4000)$. Припустимо, що обсяг виробництва в 2018 р. був на 10% більше обсягу виробництва в 2017 р., тоді обсяг виробництва в 2018 р. є вектор $V_{18} = 1.1V_{17}$ і $V_{18} = (1100, 880, 4400)$. Нехай торгівельна фірма «Велосипеди» має половину всієї продукції заводу, тоді в 2017 р. фірма купила $W = 0{,}5V_{17}$, тобто вектор закупівлі – $W = (500, 400, 2000)$. Припустимо, що в країні всього три велосипедних заводи, обсяги виробництва яких в 2017 р. були $Q_1 = (1000, 800, 4000)$, $Q_2 = (1000, 600, 2000)$, $Q_3 = (2000, 1600, 8000)$. Тоді все три заводи виробили разом в 2017 р. $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (4000, 3000, 14000)$, тобто 4000 чоловічих, 3000 жіночих і 14000 дитячих велосипедів.

У цьому прикладі ми розглянули такі операції над векторами, як множення вектора на число та додавання векторів.

Приклад 2. Комерційний банк, який бере участь у будівництві багатоповерхових автомобільних стоянок в центрі міста, зробив зусилля з отримання кредитів в трьох комерційних банках. Кожен з них надав кредити в розмірах відповідно 20, 40 і 40 млрд грош. од. під річну відсоткову ставку 40, 25 і 30%. Визначити, яку суму треба заплатити за кредити наприкінці року.

В даному прикладі мова йде про два вектори: тривимірний вектор кредитів $K = (20, 40, 40)$ і вектор процентних ставок $P = (40, 25, 30)$. Для розрахунків замість вектора процентних ставок P зручніше використовувати вектор коефіцієнтів $P_1 = (1{,}4;\ 1{,}25;\ 1.3)$.

Використовуючи простий розрахунок, керуючий комерційним банком може визначити, скільки доведеться платити після закінчення року за кредити, взяті у банків: $K \cdot P_1 = 20 \cdot 1{,}4 + 40 \cdot 1{,}25 + 40 \cdot 1{,}3 = 130$ млрд грош. од.

У цьому прикладі ми розглянули застосування операції скалярного добутка векторів.

Приклад 3. Швацьке підприємство виробляє зимові пальта, демісезонні пальта і плащі. Плановий випуск за декаду характеризується вектором $X = (10, 15, 23)$. Використовуються тканини чотирьох типів T_1, T_2, T_3, T_4. У таблиці наведено норми витрат тканини (в метрах) на кожний виріб. Вектор $C = (40, 35, 24, 16)$ задає вартість метра тканини кожного типу, а вектор $P = (5, 3, 2, 2)$ – вартість перевезення метра тканини кожного виду.

Виріб	Витрати тканини			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимове пальто	5	1	0	3
Демісезонне пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

1. Скільки метрів тканини кожного типу потрібно для виконання плану?
2. Знайти вартість тканини, що витрачається на пошиття виробу кожного виду.
3. Визначити вартість всієї тканини, необхідної для виконання плану.
4. Підрахувати вартість всієї тканини з урахуванням її транспортування.

Розв’язання.

Позначимо через A матрицю, що сформуємо з умови, тобто

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

тоді для знаходження кількості метрів тканини, необхідної для виконання плану, потрібно вектор X помножити на матрицю A:

$$XA = (10,15,23)\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= (10 \cdot 5 + 15 \cdot 3, 10 \cdot 1 + 15 \cdot 2, 23 \cdot 4, 10 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 23 \cdot 3) = (95, 40, 92, 129).$$

Вартість тканини, що витрачається на пошиття виробу кожного виду, знайдемо як добуток матриці A і вектора C^{T}:

$$AC^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 40 + 1 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \\ 3 \cdot 40 + 2 \cdot 35 + 0 \cdot 24 + 2 \cdot 16 \\ 0 \cdot 40 + 0 \cdot 35 + 4 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

Вартість всієї тканини, необхідної для виконання плану, визначиться за формулою:

$$XAC^{\mathrm{T}} = (10,15,23) \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix} = 10 \cdot 283 + 15 \cdot 222 + 23 \cdot 144 = 9472.$$

Нарешті, з урахуванням транспортних витрат вся сума буде дорівнювати вартості тканини, тобто 9472 грош. од. плюс величина

$$XAP^{\mathrm{T}} = (95,40,92,129) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 95 \cdot 5 + 40 \cdot 3 + 92 \cdot 2 + 129 \cdot 2 = 1037.$$

Тоді

$$XAC^{\mathrm{T}} + XAP^{\mathrm{T}} = 9472 + 1037 = 10509 \text{ (грош. од.)}.$$

Завдання для самостійного розв’язання

1. Витрати фірми на ресурси, які використовуються для виготовлення одиниці продукції, задано таблицею

Ресурси	Кількість	Ціна
Сировина 1 виду	200 кг	3 грн/кг
Сировина 2 виду	500 кв. м	5 кг/ кв. м
Витрати праці	0,65 людино-год	10 грн/людино-год
Обладнання	0,7 машино-год	15 грн/машино-год

Визначити ціну всіх ресурсів, що використовуються фірмою для виготовлення одиниці продукції.

2. Знайти співвідношення цін трьох товарів, якщо набори цих товарів $x_1 = (6, 2, 4)$, $x_2 = (1,8,9)$, $x_3 = (3,5,9)$ мають однакову вартість.

3. Визначити індекс інфляції через розрахунок вартості «споживчого кошика», який складається з 300 видів товарів та послуг, для індексів цін певного місяця, що наведено в таблиці

Вид товару	Обсяг товару	Ціна одиниці товару в поточному місяці	Витрати споживачів у поточному місяці	Ціна одиниці товару в попередньому місяці	Витрати споживачів у попередньому місяці
A	3	4000	12000	3500	10500
B	10	2000	20000	1800	18000
C	2	4000	8000	4500	9000
Загальні витрати	–	–	40000	–	37500

Відповіді. 1. 3117 грн. **2.** 15; 10; 6. **3.** 6,7 %.

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Тема 8. Пряма на площині. Пряма та площина у просторі

Пряма на площині

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ (або $y = \varphi(x)$) називається рівнянням, якщо воно має місце лише для точок площини *xOy*, які належать цілком визначеній лінії на цій площині. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд

$$y = kx + b,$$

де k – кутовий коефіцієнт, який визначається через тангенс кута нахилу прямої до осі *OX*; b – координата точки перетину прямої з віссю ординат.

Рівняння прямої з даним кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку M_0

$$y – y_0 = k (x – x_0),$$

де k – кутовий коефіцієнт; (x_0, y_0) – координати точки, через яку проходить пряма.

Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки M_1, M_2

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

де (x_1, y_1), (x_2, y_2) – координати точок, через які проходить пряма.

Рівняння прямої у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

де a – координата точки перетину прямої з віссю абсцис; b – координата точки перетину прямої з віссю ординат.

Загальне рівняння прямої лінії

$$Ax + By + C = 0.$$

Якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі абсцис.
Якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі ординат.
Якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Нормальне рівняння прямої

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha – p = 0,$$

де α – кут між нормальним вектором прямої (перпендикуляром до прямої) і віссю абсцис; p – найкоротша відстань від початку координат до прямої.

Щоб одержати нормальне рівняння із загального, треба помножити його ліву частину на коефіцієнт

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} ,$$

причому знак «+» береться, якщо $C < 0$, «–» якщо $C > 0$.

Відстань від точки до прямої шукається за формулою

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} ,$$

де $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої, (x_0, y_0) – координати точки.

Кут між двома прямими

$$tg\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} ,$$

де α – кут між прямими; k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих.

Дві прямі паралельні, якщо $k_1 = k_2$, і перпендикулярні, якщо $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

Пряма та площина у просторі

Рівність $\phi(x, y, z) = 0$ (або $z = \varphi(x, y)$) називається рівнянням площини, якщо вона має місце лише для точок, які належать цілком визначеній поверхні простору $xOyz$.

Загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Якщо $A = 0$, то площина паралельна осі абсцис.
Якщо $B = 0$, то площина паралельна осі ординат.
Якщо $C = 0$, то площина паралельна осі аплікат.
Якщо $D = 0$, то площина проходить через початок координат.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку і має даний нормальний вектор

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

де (A, B, C) – координати нормального вектора $\overline{n}$, (x_0, y_0, z_0) – координати точки M_0, через яку проходить площина.

Рівняння площини, яка проходить через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

де (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) – координати точок, через які проходить площина.

Нормальне рівняння площини

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

де α, β, γ – кути між нормальним вектором і осями координат Оx, Оy, Оz відповідно; p – відстань від початку координат до площини.

Щоб одержати нормальне рівняння із загального, треба помножити його ліву частину на коефіцієнт

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

причому «+» береться, якщо $D < 0$, і «–», – якщо $D > 0$.

Відстань від точки до площини

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

де $Ax + By + Cz + D = 0$ – загальне рівняння площини; (x_0, y_0, z_0) – координати даної точки.

Кут між двома площинами

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

де φ – кут між двома площинами; (A_1, B_1, C_1) та (A_2, B_2, C_2) – координати нормальних векторів площин.

Якщо площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Якщо площини перпендикулярні, то скалярний добуток їх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Канонічні рівняння прямої у просторі

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, через яку проходить пряма; (m, n, p) –координати напрямного вектора прямої.

Параметричні рівняння прямої у просторі

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, через яку проходить пряма; (m, n, p) – координати напрямного вектора прямої, t – параметр.

Рівняння прямої, як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Кут між двома прямими

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

де φ – кут між прямими; (m_1, n_1, p_1) та (m_2, n_2, p_2) – координати спрямовуючих векторів прямих.

Якщо прямі паралельні, то їхні напрямні вектори колінеарні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Якщо прямі перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх спрямовуючих векторів дорівнює нулю, тобто

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Кут між прямою і площиною

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

де φ – кут між прямою і площиною; (A, B, C) – координати нормального вектора площини; (m, n, p) – координати напрямного вектора прямої.

Якщо пряма паралельна площині, то

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Якщо пряма перпендикулярна площині, то

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p},$$

де (A, B, C) – координати нормального вектора площини; (m, n, p) – координати напрямного вектора прямої.

Питання до теми 8

1. Назвати різні види рівнянь прямої на площині. 2. Умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині. 3. Знаходження кута між прямими на площині. 4. Назвати різні види рівнянь прямої (площини) у просторі. 5. Умови паралельності та перпендикулярності площин (прямої та площини). 6. Знаходження кута між площинами (прямою та площиною). 7. Відстань від точки до прямої (площини).

Тема 9. Використання аналітичної геометрії в економіці

Аналітична геометрія досить поширена при вирішенні і візуалізації економічних задач на виробництві. Приклади застосування аналітичної геометрії в економіці: лінійна модель витрат, точка беззбитковості, закони попиту та пропозиції тощо.

Лінійна залежність між витратами й обсягом виробництва продукції. Усі витрати підприємства на виробництво й збут продукції складаються зі сталих (орендна плата, амортизація тощо) та змінних (пряма заробітна плата, витрати сировини, палива, електроенергії тощо). Якщо змінні витрати пропорційні обсягу виробництва продукції (послуг) x, то сума витрат на виробництво продукції (послуг) y:

$$y = kx+b,$$

де b – сума сталих витрат; k – ставка змінних витрат на одиницю продукції (послуг).

Приклад 1. Скласти лінійну залежність повних витрат y на виробництво продукції від обсягу виробництва x, якщо при максимальному обсязі виробництва продукції $x_{\max} = 2000$ од. загальні витрати $y_{\max} = 250$ млн грн. Мінімальному обсягу виробництва $x_{\min} = 1500$ од. відповідають загальні витрати $y_{\min} = 200$ млн грн.

Розв’язання.

Застосуємо рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

$$\frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \; \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \Rightarrow \frac{y-200}{250-200} = \frac{x-1500}{2000-1500} \Rightarrow y = 0{,}1x + 50.$$

Сума сталих витрат 50 млн грн., змінні витрати на одиницю продукції – 100000 грн.

Модель рівноваги доходів і збитків компанії. Розглянемо просту модель рівноваги доходів і збитків компанії. Компанія випускає продукцію й продає її за ціною p (грн) за одиницю. Керівництво компанії встановило, що зміна суми y_B загальних щомісячних витрат на виготовлення продукції в кількості x (тис. од.) має таку закономірність: $y_B = ax + b$. Знайдемо точку рівноваги, області прибутків і збитків компанії.

Оскільки доход від продажу x (тис.) виробів продукції ціною p (грн) за одиницю визначатиметься функцією доходу $y_Д = px$, то для рівноваги доходів і витрат потрібно, щоб виконувалася умова рівноваги

$$y_Д = y_В.$$

Знаходимо розв'язок рівняння $px = ax + b$. Маємо

$$x^* = \frac{b}{p-a}.$$

Отже, ми визначили точку рівноваги $E\left(\frac{b}{p-a}; \frac{pb}{p-a}\right)$.

Розглянемо можливості компанії. Прибуток P компанії визначається рівністю

$$P = y_Д - y_В = px - ax - b = x(p-a) - b.$$

Отже, точка рівноваги – це коли прибуток компанії $P = 0$.

Якщо $0 \le x \le x^*$, то графік функції доходу $y_Д$ проходить нижче за графік функції витрат $y_В$, і $y_Д < y_В$. Тоді $P < 0$, і компанія несе збитки.

Якщо $x > x^*$, то $y_Д > y_В$, тобто графік функції доходу $y_Д$ проходить вище за графік функції витрат $y_В$. Тоді $P > 0$, і компанія одержує прибуток.

Отже, область збитків компанії $x \in [0, x^*)$, а область прибутків $x \in (x^*, +\infty)$.

Приклад 2. Транспортні витрати на перевезення одиниці вантажу залізничним транспортом виражаються функцією $y = 2x+10$, а автомобільним транспортом – функцією $y = x+20$, де x вимірюється десятками кілометрів. Визначити, на які відстані вигідніше перевозити вантажі залізничним і автомобільним транспортом.

Прямі $y=2x+10$ та $y=x+20$ перетинаються в точці $M(10; 30)$. Її координати одержано при розв'язанні системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x + 20, \\ y = 2x + 10. \end{cases}$$

Графічний аналіз функцій витрат дає змогу зробити такі висновки:

1) якщо $x \in [0;10)$, тобто $x < 100$ км, то транспортні витрати на перевезення вантажу автомобільним транспортом нижчі, ніж залізничним;

2) якщо $x \in (10;+\infty)$, тобто $x > 100$ км, рентабельнішим буде залізничний транспорт.

Бюджетні множини й лінії бюджетного обмеження. Розглянемо n-вимірний простір товарів C. Нехай задано вектор цін $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Тоді ціна набору товарів $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ є скалярним добутком цих векторів:

$$c(x) = p\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

Нехай зафіксовано деяку грошову суму R – бюджет (або доход).

Множину всіх наборів товарів, ціна яких не перевищує R, називають *бюджетною множиною* й позначають $B(p, R)$.

Бюджетну множину можна визначити за допомогою звичайних або векторних нерівностей:

$$B(p,R)=\{x\in C: p_1x_1+p_2x_2\le R,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\}$$

або

$$B(p,R)=\{x\in C: p\bar{x}\le R,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\}.$$

Межею бюджетної множини G називають множину наборів товарів, які мають ціну рівно R.

Межу бюджетної множини можна визначити за допомогою звичайних або векторних рівностей:

$$G(p,R)=\{x\in C: p_1x_1+p_2x_2=R\}$$

або

$$G(p,R)=\{x\in C: p\bar{x}=R\}.$$

Приклад 3. Розглянемо бюджетні множини за різних цін p і бюджетів (або доходів) R.

Якщо задано бюджет R = 20 умов. грош. од. і вектор цін $\bar{p}=(2;1)$, то бюджетна множина задається нерівністю $2x_1+x_2\le 20,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

Будуємо межу бюджетної множини: це буде пряма, задана рівнянням $\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{20}=1$. Враховуємо, що $x_1\ge 0, x_2\ge 0$.

У випадку, коли R = 40, а $\bar{p}=(2;1)$ бюджетна множина

$$B(p,40)=\{(x_1,x_2): 2x_1+x_2\le 40,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\},$$

а її межа

$$G(p,40)=\{(x_1,x_2): \frac{x_1}{20}+\frac{x_2}{40}=1\}.$$

При R = 20, а $\bar{p}=(1;2)$ бюджетна множина

$$B(p,20)=\{(x_1,x_2): 2x_1+x_2\le 20,\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\},$$

а її межа

$$G(p,20)=\{(x_1,x_2):\frac{x_1}{20}+\frac{x_2}{10}=1\}.$$

Якщо R = 60, а $\overline{p}=(1;2)$, то бюджетна множина

$$B(p,60)=\{(x_1,x_2):x_1+2x_2\le 60,\ x_1\ge 0,x_2\ge 0\},$$

а її межа

$$G(p,60)=\{(x_1,x_2):\frac{x_1}{60}+\frac{x_2}{30}=1\}.$$

Тобто межею бюджетної множини буде відрізок між осями координат у першому квадранті, перпендикулярний до вектора цін.

У тривимірному просторі товарів бюджетна множина буде тригранною пірамідою, а її межа – однією з граней піраміди, частиною площини, що розміщена в першому квадранті.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Задано функції попиту $q=-5p+40$ та пропозиції $s=\frac{15}{2}p-10$. Знайти точку рівноваги.

2. Для ремонту обладнання потрібні запчастини. Якщо виготовляти їх на обладнаннях підприємства, то сталі витрати становитимуть 100 тис. грн на рік, а змінні витрати на одиницю продукції – 50 грн. Запчастини можна купувати за ціною p = 150 грн. од. Що вигідніше: виробляти чи купувати запчастини?

3. Відомо, що фіксовані витрати виробництва складають 10 тис. грн в місяць, змінні витрати – 30 грн за одиницю продукції, виручка – 50 грн за одиницю продукції. Потрібно скласти функцію прибутку $P(x)$ і побудувати її графік.

Відповіді. 1. (4; 20). **2.** Якщо потреба у запчастинах менше ніж 1000 од., то вигідніше купувати запчастини, а якщо більше – виробляти. **3.** $P(x) = 20x - 10000$.

Тема 10. Криві другого порядку

До кривих другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола та парабола. Криві другого порядку називають ще *конічними перерізами*, оскільки їх можна дістати як лінії перетину прямого кругового конуса площинами. При перетині конуса площиною, перпендикулярною до вісі, одержимо коло (рис.10.1а). Якщо ж перетнути конус площиною, яка не проходить через вершину конуса і перетинає всі його твірні, то матимемо еліпс (рис.10.1б), якщо перетнути конус площиною, паралельною двом твірним конуса, то дістанемо гіперболу (рис.10.1в) , якщо перетнути конус площиною, паралельною одній твірній конуса, то матимемо параболу (рис.10.1г)

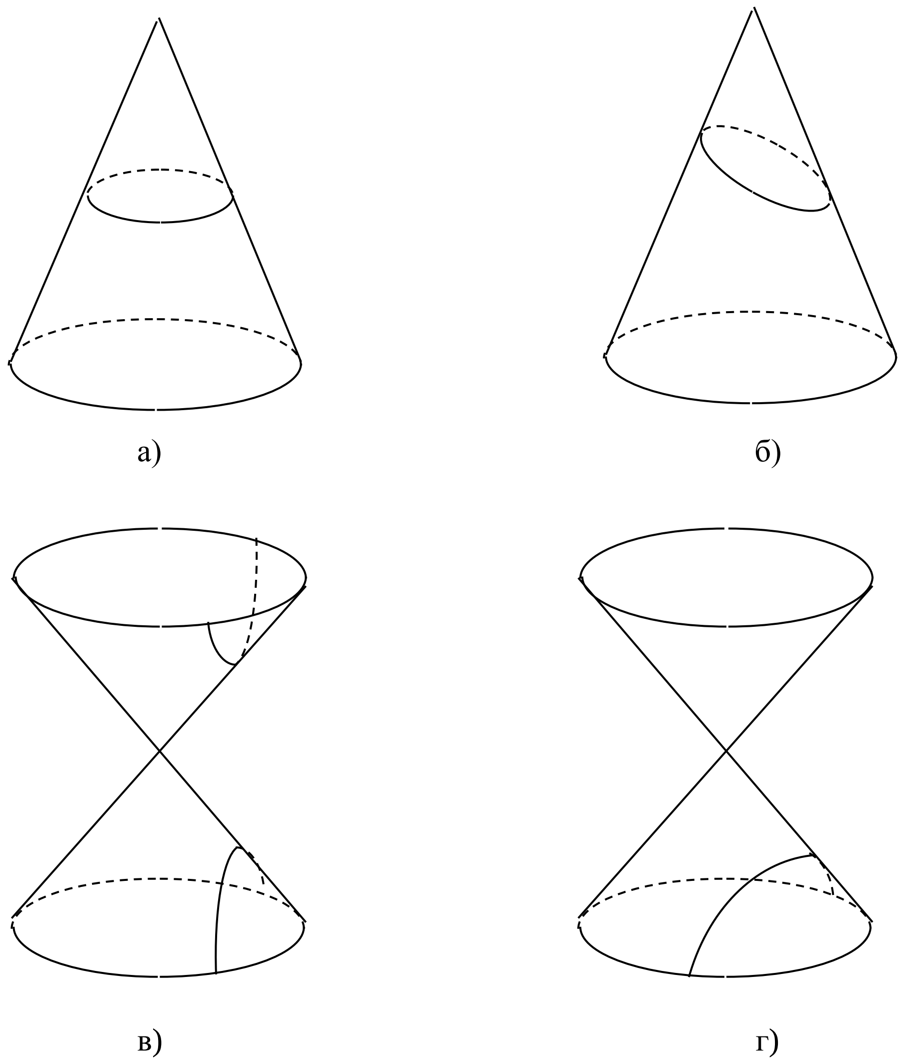

Рисунок 10.1 – Криві другого порядку

Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки *(центра кола)* дорівнюють сталому числу *(радіусу)*.

Щоб скласти рівняння кола, центр якого знаходиться у точці $O(a,b)$, а радіус дорівнює R (рис. 10.2), візьмемо на колі поточну точку M (x,y).

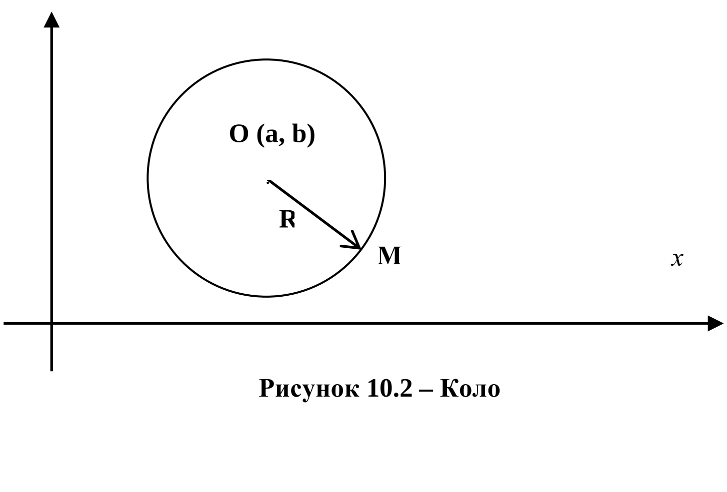

Рисунок 10.2 – Коло

Де б не знаходилася точка M на колі, завжди $|OM| = R$, тобто $|OM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (10.1)$$

Це *канонічне рівняння кола*.

Якщо в рівнянні (10.1) розкрити дужки і звести подібні члени, дістанемо загальне рівняння кола:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

де A, B, C – відомі коефіцієнти. Слід зауважити, що ліва частина цього рівняння не містить доданку xy

Еліпс

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величина стала (рис. 10.3).

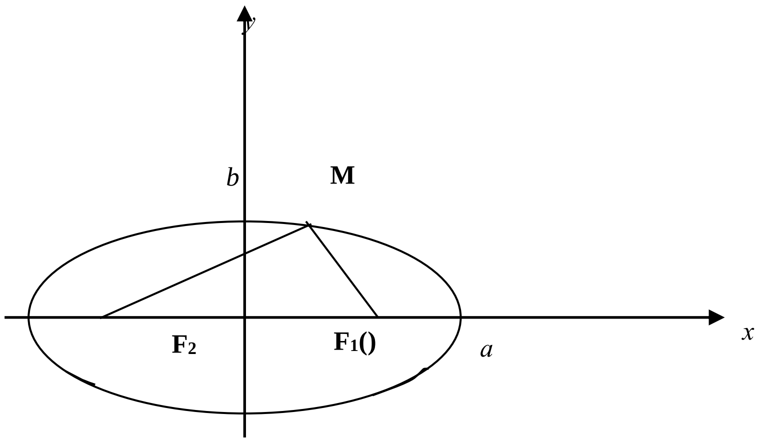

Рисунок 10.3 – Еліпс

Нехай F_1 та F_2 – фокуси еліпса, а M – його довільна точка, координати якої позначимо через x і y . Відрізки F_1M і F_2M називають *фокальними радіусами* точки M еліпса , суму їх позначають через $2a$, а відстань F_1F_2 між фокусами – через $2c$. У відповідності з цими позначеннями фокуси еліпса відносно вибраної системи координат мають координати $F_1(c,0)$ та $F_2(-c,0)$. За формулами відстані між двома точками обчислимо

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

За означенням еліпса $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Це і є рівняння еліпса. Спрощуючи його, поступово позбуваючись коренів, отримаємо

$$x^2\left(a^2 - c^2\right) + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right).$$

Нехай $b^2 = a^2 - c^2$. Тоді $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Поділивши обидві частини цієї рівності на a^2b^2, матимемо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (10.2)$$

Рівняння (10.2) називають *канонічним рівнянням еліпса*.

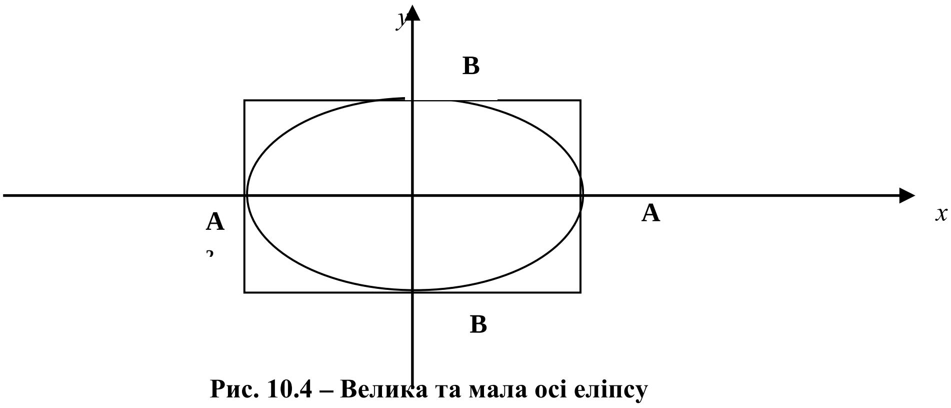

Рис. 10.4 – Велика та мала осі еліпсу

Відрізки $\left|A_1A_2\right| = 2a$ і $\left|B_1B_2\right| = 2b$ називаються довжинами осей еліпса, 2*a* – довжина великої осі, 2*b* – довжина малої осі (рис. 10.4).

Ексцентриситетом еліпса називають відношення відстані між його фокусами до довжини його великої осі:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса називають дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі еліпса і розміщені симетрично відносно центра еліпса на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Гіпербола

Гіперболою будемо називати множину точок площини *xOy* (рис.10.5), модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величина стала. Якщо позначити через F_1 і F_2 – фокальні точки гіперболи, а відстань між ними – через 2*c*, тоді відповідний модуль різниці $\left|MF_1 - MF_2\right|$ запишемо формулою

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Виконуючи над цією формулою ті ж перетворення, що і при виведенні рівняння еліпса та використовуючи позначення $b^2 = c^2 - a^2$, одержимо *канонічне рівняння гіперболи* у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (10.3)$$

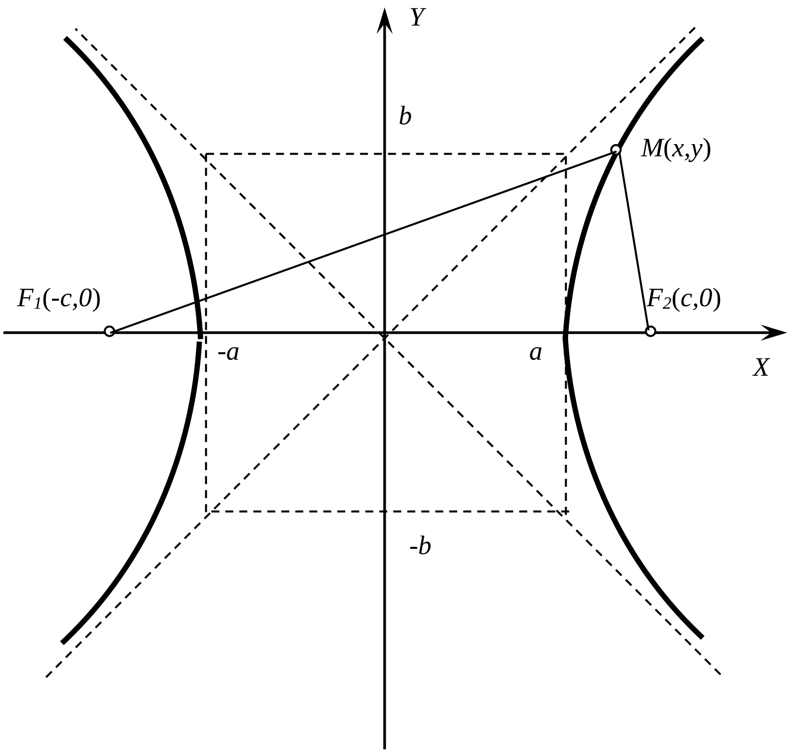

Рисунок 10.5 – Гіпербола

Безпосередній аналіз формули показує, що гіпербола симетрична відносно осей *Ox* і *Oy*.

Аналізуючи рисунок можна відмітити наступне:

1 Гіпербола не перетинає вісь *Oy*;

2. На нескінченності змінна точка $M(x,y)$ наближається до прямої, яка називається асимптотою гіперболи. Внаслідок симетрії гіпербола має дві асимптоти , рівняння яких $y = \pm\frac{b}{a}x$;

3. Гіпербола має дві вершини – точки перетину гіперболи з віссю *Ox*.

Ексцентриситетом гіперболи називають відношення відстані між його фокусами до її дійсної вісі:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Парабола

Парабола – множина точок площини *xOy*, кожна з яких рівновіддалена від даної точки, яка називається *фокусом*, та даної прямої, яка називається *директрисою* (рис. 10.6).

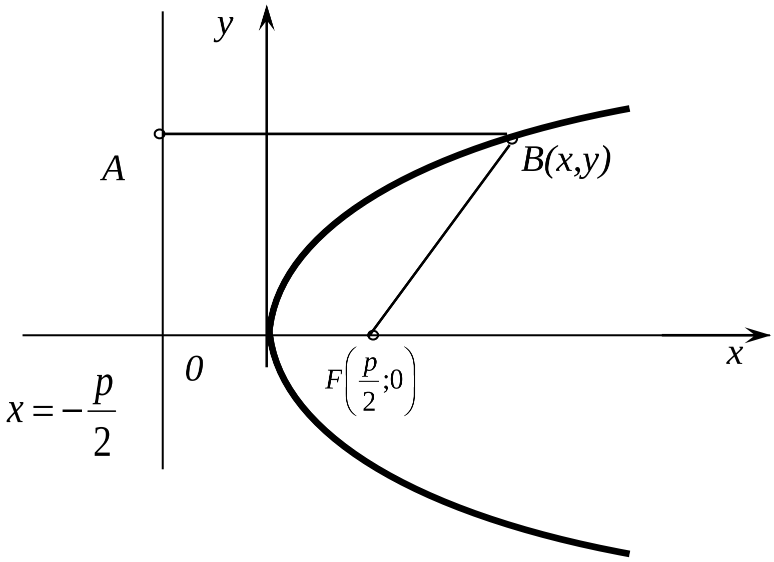

Рисунок 10.6 – Парабола

На рисунку позначено координати фокуса через $F\left(\frac{p}{2},0\right)$, а рівняння директриси записано у вигляді $x=-\frac{p}{2}$. Вказану рівність відстаней $AB = BF$ подамо формулою

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Після спрощень, аналогічних тим, що проводились вище при розгляді еліпса, одержимо канонічне рівняння параболи

$$y^2=2px. \tag{10.4}$$

Як бачимо, парабола симетрична відносно вісі Oy і проходить через початок координат O (0, 0). Ця точка називається вершиною параболи.

Відносно параметра p відмітимо наступне: із зростанням p зростає крутизна віток параболи.

Питання до теми 10

1. Як можна визначити тип лінії, заданої загальним рівнянням другого порядку? 2. Яка лінія називається кривою другого порядку? 3. Скільки типів кривих другого порядку існує? 4 Записати рівняння кривих другого порядку, вказати їх характеристики.

Тема 11. Використання кривих другого порядку в економіці

В економіці криві другого порядку застосовуються під час вивчення взаємозв’язку між рівнем інфляції та рівнем безробіття (крива Філіпса), для аналізу вподобань споживача (крива байдужості), вивчення факторів виробництва, які можуть бути використані для певного обсягу продукції (ізокванта), для вивчення закону розподілу прибутків (закон Парето), ринків збуту, для розв’язку задачі про розподіл зон економічного впливу тощо.

Приклад 1. *Крива Філіпса* (рис 11.1) – графік залежності між середнім рівнем інфляції в країні та рівнем безробіття. Згідно з кривою Філіпса, зі зростанням безробіття інфляція зменшується. О.У. Філіпс показав також зв’язок між рівнем безробіття і темпами зростання середньої заробітної плати: безробіття високе, коли заробітна платня зростає повільніше, і падає, коли заробітна платня підвищується швидше. Високий рівень інфляції зазвичай супроводжується низьким рівнем безробіття й навпаки.

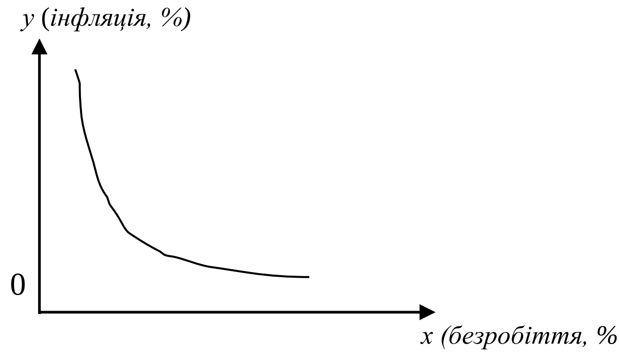

Рисунок 11.1 – Крива Філіпса

Крива Філіпса свідчить, що рівень інфляції залежить від трьох факторів:

– очікуваної інфляції;

– циклічного безробіття, тобто відхилення фактичного рівня безробіття від його природного значення;

– шокових змін пропозиції.

Закон Парето. Кількість *y* осіб, які мають прибуток не менший за *x*, можна визначити за формулою: $y = \frac{a}{x^m}$ (*n* = 2, 3,…). Лінії, які задані рівняннями $y = \frac{a}{x^m}$, $a \neq 0$, *n* > 0, називаються лініями гіперболічного типу. Закон Парето доволі точно описує розподіл великих прибутків, але не справджується для низьких .

Крива Лаффера – крива, яка характеризує залежність державних доходів від середнього рівня податкових ставок у країні. Крива показує наявність оптимального рівня оподаткування, за якого державні доходи досягають свого максимуму (рис.11.2.)

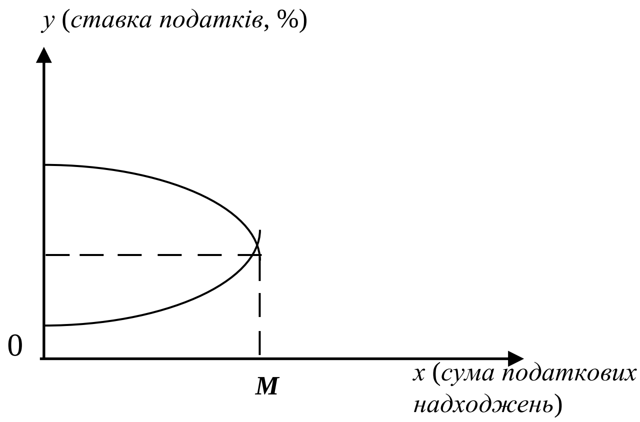

Рисунок 11.2. Залежність суми податкових надходжень від ставки податків

Як видно з рис. 11.2, при зростанні ставки оподаткування суми податкових надходжень зростають до точки *M*, у якій збір податків сягає максимуму (при ставці оподаткування).

Однак при подальшому підвищенні ставки оподаткування абсолютні суми податків, що збираються, починають падати, доходячи до нуля при 100 %-й ставці.

Приклад 2. Дослідженням виявлено, що витрати палива судном на підводних крилах зростають пропорційно квадрату швидкості судна. Треба знайти аналітичну залежність між витратами палива m та швидкістю судна V, ураховуючи, що при $V = 40$ км/год витрачено 20 л пального за годину, а також визначити витрати пального за годину при швидкості 60 км/год.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі шукану залежність записати у вигляді: $V^2 = km$, де k – деякий коефіцієнт пропорційності. Порівняння цієї формули з рівнянням параболи $y^2 = 2px$ дає змогу зробити висновок, що витрати паливного змінюються за параболічним законом. Для $m = 0$, швидкість $V = 0$, тобто парабола проходить через початок системи координат mOV. Згідно з умовою задачі парабола проходить через точку $M_0\,(20; 40)$, тому її координати задовольняють рівнянню параболи $40^2 = 20k$, звідки $k = 80$. Таким чином, аналітична залежність між витратами палива та швидкістю судна буде

$$v^2 = 80m \Rightarrow m = \frac{v^2}{80}.$$

З цієї формули випливає, що при швидкості 60 км/год витрати палива (у літрах) за годину повинні дорівнювати:

$$m = \frac{60^2}{80} = 45.$$

Приклад 3. Два однотипних підприємства A та B виробляють продукцію з однією й тією ж відпускною оптовою ціною m за один виріб. Транспортні витрати на перевезення одного виробу становлять за 1 км: для підприємства A – 10 грош. од., а для підприємства B – 20 грош. од. Відстань між підприємствами – 300 км. Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того, щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були мінімальними?

Розв'язання. Позначимо через S_1 та S_2 відстані до ринку від пунктів A та B відповідно. Тоді витрати споживачів становитимуть:

$$f(A) = m + 10S_1;\ f(B) = m + 20S_2.$$

Знайдемо множину точок, для яких $S_1 = 2S_2$, тобто ті випадки розміщення ринку, коли $f(A) = f(B)$.

$$S_1 = \sqrt{x^2 + y^2};\quad S_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2}.$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(300 - x)^2 + y^2}.$$

$$x^2 + y^2 = 360000 - 2400x + 4x^2 + 4y^2;$$

$$(x - 400)^2 + y^2 = 200^2.$$

Це коло. Таким чином, для споживача всередині кола вигідніше купувати у пункті B, поза колом – у пункті A, а на колі – однаково.

Приклад 4. На прямому відрізку залізної дороги розташовані дві станції – A та B. З деякої точки C в околі точки B вантаж можна доправити до A двома шляхами: 1) по шосе до B, далі залізницею в A; 2) одразу по шосе до A (в обох випадках вважаємо, що шосе прокладено прямолінійно). Вказати геометричне місце точок C, для яких перший спосіб доставки вигідніший за другий.

Розв'язання.

Позначимо $AB = 2l$, виберемо систему координат, в якій Ox направлено вздовж AB, а точка (0; 0) знаходиться посередині між A і B (рис. 11.3).

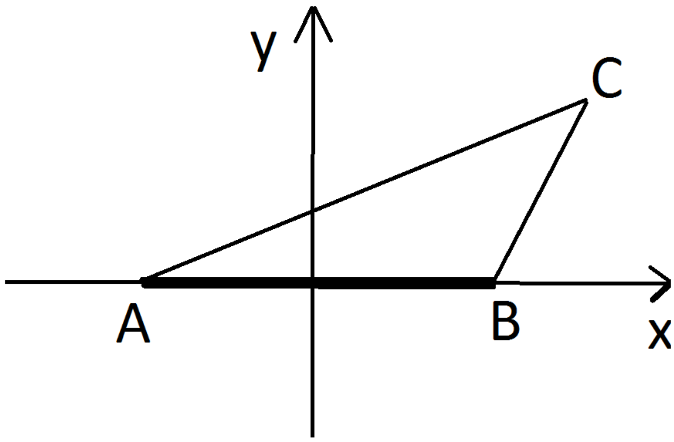

Рисунок 11.3 – Рисунок до прикладу 4 (пункт 1)

Тоді A (–l; 0), B (l; 0), C (x; y). Нехай вартість перевезення 1 т вантажу залізницею і по шосе – p і q відповідно; 2r – вартість погрузки та вигрузки вантажу на станції. Тоді вартість доставки:

1) шляхом $CB + AB$:

$$S_1 = CB \cdot q + AB \cdot p + 2r\,;$$

2) шляхом CA:

$$S_2 = AC \cdot q\,;$$

тоді

$$S_2 - S_1 = (CB - AC) \cdot q + 2lp + 2r\,.$$

Якщо $S_1 = S_2$, то

$$(AC - BC) = \frac{2lp + 2r}{q} = const\,,$$

тобто точки $C(x;y)$ належать гіперболі

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a = \dfrac{lp + r}{q}$, $b = \sqrt{l^2 - a^2}$.

Якщо $S_1 < S_2$, то $(AC - BC) > \dfrac{2lp + 2r}{q}$. Отже, шукане геометричне місце – внутрішня частина правої вітки гіперболи (тої, що проходить через точку *B*) (Рис.11.4).

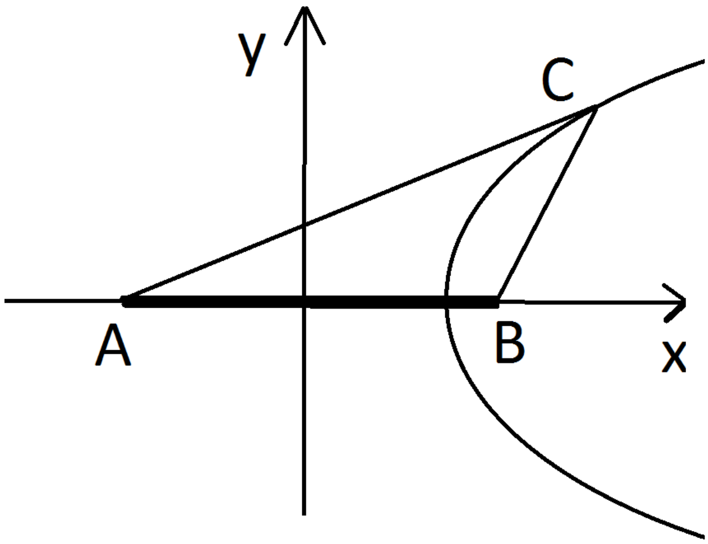

Рис.11.4 – **Рисунок до прикладу 4 (пункт 2)**

Відповідь: шукане геометричне місце – внутрішня частина правої вітки гіперболи (Рис. 11.4).

Завдання для самостійного розв'язання

1. Нехай маємо два підприємства, які віддалені однeвід одного на l00 км. Підприємства виробляють одну й ту саму продукцію, причому ціна одиниці продукції однакова і дорівнює *m*. Відомо, що транспортні витрати на перевезення продукції від підприємства *A* до споживача становлять 1 грош одю на 1 км, а від підприємства *B* – 2 грош. од. на 1 км. Для яких споживачів витрати на придбання одиниці виробу в підприємстві *A* і *B* повинні бути однаковими? Як доцільно прикріпити споживачів до підприємств?

2. Розв'язати задачу 1 за умови, що транспортні витрати на 1 км шляху при перевезенні одного виробу від підприємств *A* та *B* до споживача однакові і становлять 1 грош. од. на 1 км, а ціна реалізації кожного виробу на підприємствах *A* і *B* дорівнює 200 і 225 грош. од. відповідно.

3. Відстань між двома заводами, що виробляють однакову продукцію, становить 300 км. Транспортні витрати на транспортування продукції від заводу *A* вдвічі більші, ніж від заводу *B*. Визначити лінію – межу районів, на якій однаково вигідно отримувати продукцію від заводів *A* та *B*

Відповіді. 1. Споживачам, які знаходяться всередині круга $(x - 83{,}3)^2 + y^2 \le 66{,}7^2$, доцільніше купувати на *B*, поза кругом – на *A*. **2.** Усередині круга $(x + 62{,}5)^2 + y^2 \le 37{,}5^2$ купуватимуть на підприємстві *A*, поза кругом – на *B*. **3.** $(x + 100)^2 + y^2 = 200^2$.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Тема 12. Вступ до математичного аналізу

Границя функції

Поняття функції – одне з основних понять математичного аналізу.

Якщо до кожного значення змінної величини x, яка належить множині дійсних чисел X, за певним правилом поставимо у відповідність цілком певне дійсне значення змінної величини y, то кажуть, що на множині дійсних чисел задано *функцію* $y = f(x)$.

Число x називається *незалежною змінною* (*аргументом*) функції, а X – *областю визначення* функції, y – *значенням* функції в точці x, а сукупність всіх значень функції позначимо через Y. Найчастіше зустрічаються три способи завдання функції: аналітичний, табличний і графічний. При аналітичному способі функцію задають за допомогою однієї або кількох формул.

Серед функцій, заданих аналітично, головну роль відіграють основні *елементарні функції* (степенева, показникова, логарифмічна, тригонометрична, обернена тригонометрична, стала), а також функції, заданих за допомогою формул, що містять скінченне число арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій основних елементарних функцій. Вони складають основу математичного аналізу.

Число A називається *границею* функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, можна знайти $\delta > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$ $(x \in X)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

За допомогою символів:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Твердження про те, що A – границя функції $f(x)$ у точці x_0, можна записати таким чином:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad \text{або} \qquad f(x) \to A \text{ при } x \to x_0 .$$

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно і достатньо, щоб мала місце рівність $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, де $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ – *ліва границя* функції і $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ – *права границя* функції $f(x)$ у точці $x = x_0$. Запис $x \to x_0 - 0$ $(x \to x_0 + 0)$ означає, що точка x наближається до точки x_0 зліва (справа). Права і ліва границі функції у точці називаються *односторонніми границями* функції в цій точці.

На практиці обчислення границь ґрунтується на таких правилах. Якщо існують скінченні $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\pm f_2(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm \lim_{x\to x_0} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}[c\cdot f(x)]=c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0} f(x)]^n,$$ де n – ціле дане число;

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)};$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)} \quad (\lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0);$$

$$\lim_{x\to x_0} c=c,$$ де $c = const$; $$\lim_{x\to 0}\frac{c}{x}=\infty,$$ де $c = const$;

$$\lim_{x\to \infty}\frac{c}{x}=0,$$ де $c = const$.

Зазначимо, що для всіх елементарних функцій в будь-якій точці їх областей визначення має місце рівність

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)=f(x_0).$$

Зауважимо, що обчислення границі будь-якої функції $f(x)$ треба починати з підстановки замість x його граничного значення.

Наприклад, обчислити

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{x^3+x^2+1}=\frac{1-2+3}{1^3+1^2+1}=\frac{2}{3}.$$

В багатьох випадках у результаті такої підстановки одержують вирази $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$; 1^∞, які називаються *невизначеностями*. Всі вказані невизначеності розкриваються алгебраїчними і тригонометричними перетвореннями, або за допомогою переходу до еквівалентних нескінченно малих величин.

Нескінченні малі в точці x_0 функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *еквівалентними нескінченно-малими* в околі точки x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих при $u(x)\to 0$

$$sin\ u \sim u; \quad tg\ u \sim u; \quad arcsin\ u \sim u;$$

$$arctg\ u \sim u; \quad log_a(1+u) \sim \frac{u}{ln\ a}; \; ln(1+u) \sim u;$$

$$a^u - 1 \sim u\ ln\ a; \qquad e^u - 1 \sim u; \quad (1+u)^k - 1 \sim ku.$$

Приклад еквівалентних нескінченно великих при $x \to \infty$

$$a_0\, x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \sim a_0 x^n.$$

За допомогою еквівалентних нескінченно малих розкривається безпосередньо невизначеність $\frac{0}{0}$, а за допомогою еквівалентних нескінченно великих – невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. При цьому використовується теорема про заміну нескінченно малих або нескінченно великих еквівалентними до них величинами.

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих не зміниться, якщо їх замінити еквівалентними величинами.

При обчисленні деяких границь, використовують таке твердження: якщо функції *f(x)* та *φ(x)* мають границі в точці x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, то й функція $f(x)^{\varphi(x)}$ також має границю, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}.$$

При розкритті невизначеностей інших видів їх спочатку зводять алгебраїчними або тригонометричними перетвореннями до виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, а потім використовують згадану теорему.

Наприклад, знайти

$$\lim_{x\to 0}(xctg\,\frac{x}{2}) = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to 0}\frac{x}{tg\,\frac{x}{2}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{2}} = 2.$$

При розв’язанні цього прикладу взято до уваги, що при $x \to 0$ $\quad tg\,\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$.

Тут для розкриття невизначеності $|0\cdot\infty|$ можна використати *першу визначну границю* $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$. Проте більш раціонально скористатися еквівалентними нескінченно малими.

При розкритті невизначеності 1^∞ можна скористатися *другою визначною границею*

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{або} \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e,$$

Число е = 2,71828… – ірраціональне, воно є основою натурального логарифму: $\ln x = \log_e x$.

Наприклад, знайти

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{mx}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{k}{x})^{\frac{x}{k}}]^{\frac{k}{x}\cdot mx}=e^{km}.$$

Неперервність функції

Означення 1. Функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, називається *неперервною в точці* x_0, якщо її приріст у цій точці при $\Delta x\to 0$ є нескінченно мала величина.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right]=0.$$

Це означення рівносильне такому: функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0, називається *неперервною в точці* x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Для неперервності функції в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$, де $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ – ліва границя функції,

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ – права границя функції, $f(x_0)$ – значення функції $f(x)$ в точці x_0. При цьому припускається, що функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 (у тому числі і в самій точці x_0).

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона неперервна в цій області. Всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Якщо в точці порушується умова неперервності, така точка називається *точкою розриву* функції. Точки розриву функції можуть належати області визначення функції або знаходитися на границі цієї області.

Класифікація точок розриву.

1. Якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$, то $\pm x_0$ – *точка усувного розриву*.

2. Якщо $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то x_0 – *точка розриву першого роду*, а різниця $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ – стрибок функції $f(x)$ в точці x_0.

3. Якщо хоча б одна з границь $f(x_0+0)$ і $f(x_0-0)$ не існує або є нескінченна, то x_0 – *точка розриву другого роду*.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0, то функції $f(x)+g(x);\ f(x)\cdot g(x);\ \frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0)\neq 0$) також неперервні в точці x_0.

Зазначимо, що: 1) елементарна функція може мати розрив тільки в тій точці, де вона не є визначена; 2) якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами для різних інтервалів зміни аргументу, вона може мати розриви лише в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$y = 2x^2 - 3x.$$

Розв'язання.

Функція визначена в інтервалі $(-\infty, \infty)$. Покажемо, що в цьому інтервалі вона неперервна. Знайдемо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y.$ Оскільки $y(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x),$ то

$$\Delta y = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (2x^2 - 3x) =$$
$$= 2(x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - 3x - 3 \cdot \Delta x - 2x^2 + 3x = 4x \cdot \Delta x - 3\Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, одержимо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left(4x \cdot \Delta x - 3 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2\right) = 4x \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, це означає, що функція $y = 2x^2 - 3x$ неперервна при будь-якому значенні *x*.

Питання до теми 12

1. Що називається функцією однієї змінної? 2. Які елементарні функції ви знаєте? 3. Які існують способи обчислення границь? 4. Що називається функцією, неперервною в точці? 5. Класифікація точок розриву.

Тема 13. Зв'язок функції, границі та неперервності функції з економікою

Спектр використання функцій в економіці досить широкий. Найбільш часто використовуються в економіці такі функції:

1. *Функція корисності* – залежність корисності, тобто результату, ефекту деякої дії від рівня (інтенсивності) цієї дії.

2. *Виробнича функція* – залежність результату виробничої діяльності від обумовлюючих його факторів.

3. *Функція випуску* (частковий вид виробничої функції) – залежність обсягу виробництва від обсягу продукції.

4. *Функція витрат* (частковий вид виробничої функції) – залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. *Функція попиту, споживання і пропозиції* – залежність обсягу попиту, споживання або пропозицій на окремі товари або послуги від різних факторів (наприклад ціни, доходу тощо).

Враховуючи, що економічні явища і процеси обумовлені діями різних факторів, для їх дослідження широкого використовуються *функції багатьох змінних*. Але, якщо дією побічних факторів можливо знехтувати, або вдається зафіксувати ці фактори на певних рівнях, то залежність одного головного фактора вивчається з допомогою функції однієї змінної.

В основу аналізу деяких економічних факторів покладена методика відсоткових обчислень. Використання цих методів широко поширене у фінансовому та інвестиційному аналізі при розрахунках відсотків за кредитами і цінними паперами, в задачах про зростання банківського вкладу, при стягненні податків. Залежно від умов проведення фінансових операцій (розміру вкладу та строку його розміщення), як нарощення, так і дисконтування, можуть здійснюватися із застосуванням простих, складних або неперервних відсотків. У практичних розрахунках в основному застосовують дискретні відсотки, тобто відсотки, які нараховуються за фіксовані однакові інтервали часу (рік, півріччя, квартал тощо). Час – дискретна змінна.

В деяких випадках – у доказах і розрахунках, пов’язаних з неперервними процесами, виникає необхідність у застосуванні неперервних відсотків. У фінансово-кредитних операціях безперервні процеси нарощення грошових сум, тобто нарощення за нескінченно малі проміжки часу, застосовуються рідко. Істотно більше значення безперервне нарощення має у кількісному фінансово-економічному аналізі складних виробничих і господарських об’єктів і явищ, наприклад, при виборі й обґрунтуванні інвестиційних рішень. Необхідність у застосуванні неперервного нарощення (або неперервних відсотків) визначається, насамперед, тим, що багато економічних явищ за своєю природою неперервні, тому аналітичний опис у вигляді безперервних процесів більш адекватний, ніж на основі дискретних.

Модель неперервного нарахування відсотків. Нехай початковий внесок до банку P грошових одиниць, банківська річна відсоткова ставка R %. Тоді розмір внеску P_t^* через t років з використанням другої визначної границі

$$P_t^* = P\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{R}{100n}\right)^{\frac{100n}{R}}\right]^{\frac{Rt}{100}},$$

де n – кількість нарахувань відсотків за рік.

Також ще одним прикладом застосування функції в економіці є *використання таблиць функцій*, які дозволяють зробити можливими різні розрахунки, виключити або спростити громіздкі обчислення.

При обчисленні за допомогою таблиць доводиться стикатися з ситуацією, коли аргумент функції заданий з більшою точністю, ніж дозволяє таблиця. В такому випадку бажано вдатися до *інтерполяції* – наближеного знаходження невідомих значень функцій по відомим її значеннях в заданих точках.

Найбільш простим є *лінійне інтерполювання*, при якому допускається, що приріст функції пропорційний приросту аргументу. Якщо задане значення x лежить між наведеними в таблиці значеннями x_0 і $x_1 = x_0 + h$, яким відповідають значення функції $y_0 = f(x_0)$ і $y_1 = f(x_0) + \Delta f$, то вважають, що $f(x) = f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{h}\Delta f$.

Величини $\dfrac{x-x_0}{h}\Delta f$ називаються *інтерполяційними поправками*. Ці величини обчислюються за допомогою таблиці або наводяться в додатку до таблиці.

Якщо згідно заданим значенням функції необхідно знайти наближене значення аргументу, то необхідно здійснити *обернене інтерполювання*.

Приклад 1 (витрати, дохід та прибуток). Економічним підрозділом заводу встановлено, що при виробництві x одиниць продукції A щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою $V(x) = 20000 + 40x$ (гривень), а дохід $D(x)$, одержаний від продажу x одиниць цієї продукції, виражається формулою $D(x) = 100x - 0{,}001x^2$ (гривень). Кожного кварталу завод виробляє 3100 одиниць продукції A, але бажає збільшити випуск цієї продукції до 3200 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв’язання.

Запланований приріст продукції буде

$$\Delta x = 3200 - 3100 = 100 \text{ (одиниць продукції } A\text{)}.$$

Приріст витрат

$$\Delta V(x) = V(3200) - V(3100) = [20000 + 40\cdot 3200] - [20000 + 40\cdot 3100] =$$

$$= 148000 - 144000 = 4000.$$

Приріст доходу

$$\Delta D(x) = D(3200) - D(3100) = (1003200 - 0{,}013200] - [1003200 - 0{,}013100] =$$

$$= 217600 - 213900 = 3700.$$

Позначимо прибуток $P(x)$. Тоді

$$P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 0{,}01x^2 - (20000 + 40x) = 60x - 0{,}01x^2 - 20000.$$

Приріст прибутку буде

$$\Delta P(x) = P(3200) - P(3100) = [60\cdot 3200 - 0{,}013200^2 - 20000] -$$

$$- [603100 - 0{,}013100^2 - 20000] = 69600 - 69900 = -300.$$

Отже, прибуток зменшиться на 300 гривень.

Середня величина приросту прибутку на одиницю приросту продукції буде

$$\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \frac{-300}{100} = -3.$$

Отже, кожна одиниця додаткової продукції зменшує прибуток на 3 гривні.

Приклад 2 (зміна кількості населення). Зміна кількості населення деякого міста за час t, що вимірюється роками, здійснюється за формулою

$$P(t) = 10000 + 1000t - 120t^2.$$

Визначити середню швидкість зростання населення в період між часом: *a*) $t = 3$ та $t = 5$; *b*) $t = 3$ та $t = 3{,}5$.

Розв'язання. Середню швидкість зростання населення міста за час t знайдемо за формулою

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}.$$

a) в цьому випадку: $\Delta t = 5 - 3 = 2$

$$\Delta P(t) = P(5) - P(3) = [10000 + 5000 - 120\cdot 25] - [10000 + 3000 - 1209] = = 2000 - 1920 = 80.$$

Середня швидкість зростання населення міста в цей період буде 80:2=40.

б) в цьому випадку: $\Delta t = 3{,}5 - 3 = 0{,}5$.

$$\Delta P(t) = P(3{,}5) - P(3) = (10000 + 3{,}5 \cdot 1000 - 120 \cdot (3{,}5)^2) -$$
$$- (10000 + 3000 - 120 \cdot 9) = 500 - 390 = 110.$$

Отже, середня швидкість зростання населення міста в цей час буде $\dfrac{110}{0{,}5} = 220$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Мале підприємство встановило, що витрати на виготовлення x окремих виробів задовольняють такій закономірності $V(x)=0{,}001x^3–0{,}3x^2+40x+1000$. Знайти: приріст витрат, коли кількість виробів зросте з 50 до 100 та середні витрати на виготовлення кожної одиниці виробу, коли їх кількість зросте з 50 до 60.

2. Загальний щотижневий дохід D в гривнях, одержаний підприємством після продажу виготовлених x одиниць виробів, має таку закономірність $D(x)=500x+2x^2$. Визначити середнє значення доходу на одиницю приросту виготовленої продукції, якщо її кількість x зросте зі 100 до 120.

3. Початковий внесок, покладений в банк під 10% річних, склав 6 млн. грош. од. Знайти розмір вкладу через 5 років при нарахуванні відсотків: а) щорічно, б) поквартально, в) безперервно.

Відповіді. 1. $\Delta V = 745$; середнє значення 28,1. **2.** Середнє значення доходу на одиницю приросту виробів – 940 гривень. **3.** а) 9,663 млн грош. од.; б) 9,832 млн грош. од.; в) 9,892 млн грош. од.

Тема 14. Похідна і диференціал функції однієї змінної

Похідною від функції $y = f(x)$ по незалежній змінній x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля.

Для позначення похідної функції $y = f(x)$ в точці використовують символи y' або $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ і $\dfrac{df(x)}{dx}$.

Отже, $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Геометрично похідна $y' = f'(x)$ являє собою тангенс кута нахилу дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x, y).

Рівняння дотичної T до кривої $y = f(x)$ у точці M_0 (x_0, y_0) (рис. 14.1)

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі у точці $M_0(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

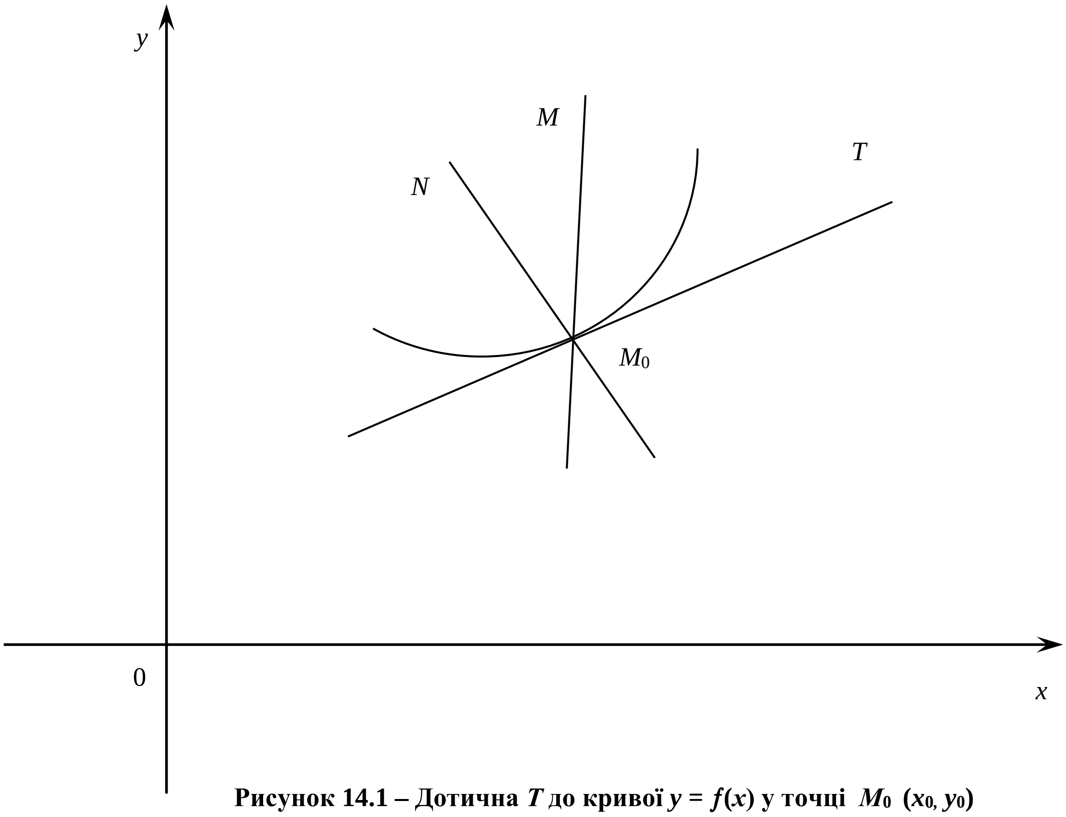

Рисунок 14.1 – Дотична *T* до кривої $y = f(x)$ у точці M_0 (x_0, y_0)

Правила та таблиця відшукування похідних функцій:

1. $c' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
4. $(uv)' = u'v + uv'$; $(cu)' = cu'$,
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$; $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;
6. $\left(u^a\right)' = au^{a-1} \cdot u'$; $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$;
7. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \ u'$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
8. $\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$; $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
9. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;
10. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;
11. $\left(tgu\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
12. $\left(ctgu\right)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$;
13. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

14. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

15. $\left(arctgu\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

16. $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

У наведених формулах $u = u(x)$ та $v = v(x)$, а с – стала. Для того, щоб скористатись потрібною формулою, необхідно навчатись визначати найменування складної функції та її проміжний аргумент.

Приклад. Відшукати похідну функції $y = (sin\, x + 1)^3$.

Розв'язання.

Маємо степеневу функцію з показником 3 і основою($sin\, x$ +1). Використовуємо правило знаходження похідної складної степеневої функції, потім суми двох функцій $sin\, x + 1$:

$$y' = 3(sin\, x + 1)^2 \cdot (sin\, x + 1)' = 3(sin\, x + 1)^2 \cdot \cos x.$$

Якщо функція $y = f(x)$ задана неявно $F\,(x,\, y) = 0$, то для відшукування похідних y_x' треба зробити наступне:

1) продиференціювати обидві частини цієї рівності по x, пам'ятаючи, що y є функцією від x;

2) розв'язати отримане рівняння відносно y'.

Приклад. Знайти похідну y_x', якщо $tg\, y = xy$.

Розв'язання.

Диференціюємо обидві частини цієї рівності

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = y + xy'.$$

Знаходимо y':

$$y' = y\, cos^2 y + xy'\, cos^2 y; \qquad y'\,(1 - x\, cos^2 y) = y\, cos^2 y; \qquad y' = \frac{y\, cos^2 y}{1 - x\, cos^2 y}.$$

Часто відшукання похідної спрощується за допомогою логарифмічної похідної функції $y = f(x)$, що являє собою похідну від логарифма цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Приклад. Відшукати похідну степенево-показникової функції.

$$y = (x^3 + 1)^{tg\, x}.$$

Розв’язання.
Логарифмуючи, отримаємо

$$\ln y = tg\, x \cdot \ln (x^3 + 1).$$

Диференціюємо

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x}\ln(x^3+1) + tgx\frac{3x^2}{x^3+1}.$$

Звідки знаходимо y':

$$y' = \left(x^3+1\right)^{tgx}\left(\frac{ln\left(x^3+1\right)}{cos^2 x} + \frac{3x^2 tgx}{x^3+1}\right).$$

Диференціал функції

Головна, лінійна відносно Δx, частина приросту Δy функції $y = f(x)$ називається *диференціалом* цієї функції і позначається символом dy або $df(x)$:

$$dy \overset{df}{=} f'(x)\cdot \Delta x$$

Якщо $f(x) = x$, то $dx = x' * \Delta x = \Delta x$, тому

$$dy = f'(x)\cdot dx. \tag{14.1}$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційованою* в точці х, якщо вона має в цій точці диференціал.

Із формули (1.1) випливає, що

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Основні властивості диференціалів такі:

1. $dc = 0$, де $c = const$;
2. $d(cu) = cdu$;
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4. $d(uv) = udv + vdu$;
5. $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0);$
6. $df(u) = f'(u)du$.

Зауважимо, що властивість 6 виражає інваріантність форми диференціала $d\left(f\left(u\right)\right) = f'\left(u\right)du$ незалежно від того, чи змінна є незалежною, чи функцією іншої змінної.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{1+\ln x}.$

Розв’язання.
За формулою $dy = y'\,dx$ матимемо

$$dy = \left(\sqrt{1+\ln x}\right)' \cdot dx = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{1+\ln x}} \cdot dx .$$

Для малих значень Δx, $\Delta y \approx dy$, звідки, враховуючи, що $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, отримаємо формулу

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x,$$

яка використовується в наближених обчисленнях.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt[3]{1{,}02}$.

Розв`язання.

Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Для цієї конкретної функції формула

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

набуває вигляду

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^{2}} \cdot \Delta x.$$

Поклавши в отриманій формулі $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, маємо

$$\sqrt[3]{1{,}02} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} \cdot 0{,}02 = 1 + \frac{0{,}02}{3} \approx 1{,}0067.$$

Дослідження функцій із застосуванням похідних

1. Нехай функція $f(x)$ диференційована на відрізку $[a; b]$. Якщо

   а) $f(x)$ – зростає на $[a; b]$, то $f'(x) \ge 0$, $\forall x \in [a;b]$;

   б) $f(x)$ – спадає на $[a; b]$, то $f'(x) \le 0$, $\forall x \in [a;b]$.

2. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована в кожній його внутрішній точці. Якщо

   а) $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a;b)$, то $f(x)$ зростає на $[a; b]$;

   б) $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a;b)$, то $f(x)$ спадає на $[a; b]$.

Таким чином, інтервали знакосталості похідної $f(x)$ є інтервалами монотонності цієї функції.

Точка x_0 називається *точкою максимума* функції $f(x)$, якщо $f(x_0) \ge f(x)$ для всіх x із деякого досить малого околу точки x_0.

Точка x_1 називається *точкою мінімуму* функції $f(x)$, якщо $f(x_1) \le f(x)$ для всіх x із деякого досить малого околу точки x_1.

Точки мінімуму і максимуму називаються *точками екстремуму*.

Необхідна умова існування екстремуму.

Якщо точка x є екстремальною точкою диференційованої функції $f(x)$, то

$f'(x) = 0$.

Точки, в яких похідна перетворюється в нуль або не існує, називаються *критичними*.

Достатні умови існування екстремуму функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, що містить критичну точку x_1 і диференційована в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_1). Якщо

а) $\left.\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{при } x < x_1, \\ f'(x) < 0 & \text{при } x > x_1 \end{array}\right\}$, то x_1 – точка максимуму функції $f(x)$,

б) $\left.\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{при } x < x_1, \\ f'(x) > 0 & \text{при } x > x_1 \end{array}\right\}$, то x_1 – точка мінімуму функції $f(x)$.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Розв’язання. Функція існує на нескінченому проміжку $(-\infty; \infty)$. У точці O (0; 0) крива перетинає осі координат, асиметрична відносно початку координат. Знаходимо першу похідну і прирівнюємо її до нуля

$$y' = \frac{1\cdot(1+x^2) - 2x\cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Корені похідної $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ розбили нескінчений проміжок на три: $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; \infty)$. Підставляючи конкретне значення аргументу x з кожного інтервалу в похідну, дістаємо її знак на даному інтервалі.

Результати зводимо в табл. 14.1.

Таблиця 14.1

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	спадає	*min*	зростає	*max*	спадає
	$\searrow$	$-1/2$	$\nearrow$	$1/2$	$\searrow$

Отже, на інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(1; \infty)$ – функція спадає, а на проміжку $(-1; 1)$ – зростає. Точка $x_1 = -1$ – це точка мінімуму, а точка максимуму – $x_2 = 1$. Значення функції в цих точках:

$$y(-1) = -\frac{1}{2}; \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

Опуклість, угнутість і точки перетину кривої можна знайти за допомогою другої похідної, а саме:

1) Крива $y = f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі ці точки лежать під довільною дотичною до кривої на цьому інтервалі.

2) Крива $y = f(x)$ називається *угнутою* на інтервалі $(a;b)$, якщо всі точки лежать над довільною дотичною до кривої на цьому інтервалі.

Якщо на інтервалі $(a;b)$ друга похідна $f''(x) < 0$, то крива $y = f(x)$ опукла на цьому проміжку; якщо ж $f''(x) > 0$, то крива угнута на цьому проміжку.

Точкою перегину кривої $y = f(x)$ називають точку, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої від угнутої чи навпаки.

Якщо в точці x_0 друга похідна $f''(x) = 0$ або не існує і при переході через цю точку $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину.

Приклад. Дослідити на опуклість та угнутість і знайти точки перегину функції

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Розв'язання.

Прирівняємо до нуля другу похідну функції і знаходимо абсциси точок перегину:

$$y'' = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}; x_3 = \sqrt{3}.$$

Розглянемо знаки другої похідної у проміжках, на які розбивають проміжок $(-\infty;\infty)$ точки перегину (таблиця 14.2).

Таблиця 14.2

X	$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3};\infty\right)$
$f''(x)$ $f(x)$	– опукла	0 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$	+ угнута	0 0	– опукла	0 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	+ угнута
	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

Графік функції опуклий на проміжку $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ і $(0;\sqrt{3})$; і угнутий на проміжках $(-\sqrt{3};0)$ та $\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

Визначимо значення функції в точках перегину:

$$y(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4};\ y(0) = 0;\ y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Щоб визначити поведінку кривої при нескінченному зростанні абсциси або ординати точок кривої, вводять асимптоти.

Асимптота – це пряма, відстань від якої до змінної точки прямої при віддаленні точки на нескінченність прямує до нуля. Вертикальні асимптоти – це точки розриву функції, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ є асимптота.

Похилена асимптота має рівняння $y = kx + b$, де $$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx].$$

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Розв’язання.

Функція $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ не має точок розриву, тому й вертикальних асимптот вона не має. Відшукаємо похилені асимптоти, знайдемо границі.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{(1+x^2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\infty} = 0, \;\; b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x}{1+x^2} - 0 \cdot x\right] = 0,$$

тобто $y = 0$ – горизонтальна асимптота графіка функції.

Щоб обчислити поводження функції $y = f(x)$ і побудувати її схематичний графік, треба

1) визначити область існування функції, встановити точки розриву та інтервали неперервності;
2) дослідити функцію на парність чи непарність, періодичність;

3) знайти точки екстремумів функції, інтервали монотонності;
4) знайти інтервали опуклості і угнутості графіка, точки перетину;
5) знайти асимптоти графіка функції;
6) знайти точки перетину графіка з осями координат;
7) побудувати графік функції

Об’єднавши результати прикладів, схематично накреслимо графік функції $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (рис.14.2).

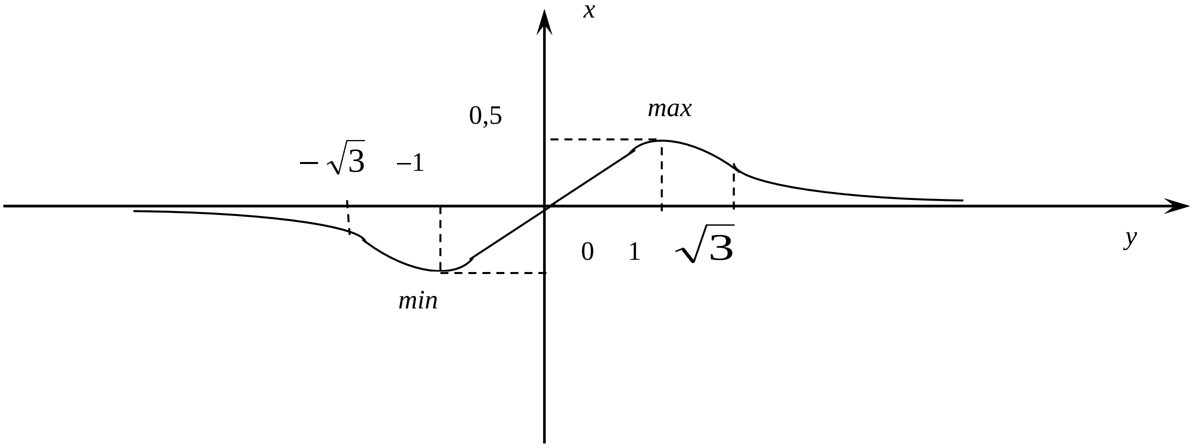

Рисунок 14.2 – Графік функції $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

Питання до теми 14.

1. Що називається похідною функціеї однієї змінної? 2. Дати визначення диференціала функції 3. Де застосовується похідна та диференціал функції однієї змінної? 4. Необхідна та достатня умови існування екстремуму функції однієї змінної. 5. Що таке асимптота?

15. Застосування диференціального числення в економіці

Надамо деякі математичні моделі економічних процесів, що можна дослідити у процесі вивчення теми «Похідна та диференціал функції однієї змінної».

Модель продуктивності праці. Нехай задано $u = u(t)$ – кількість виробленої продукції за відрізок часу t, де $t \in [0,T]$. Тоді продуктивність праці в кожний момент часу $t_0 \in [0,T]$ знаходиться як похідна $z = u'(t_0)$.

Модель маргинальних витрат. Нехай задано функцію витрат, що залежить від обсягу виробництва $TC(Q)$. Тоді граничні (маргинальні) витрати знаходяться як похідна функції $MC = \dfrac{dTC}{dQ} = TC'(Q).$

Модель маргинального доходу. Нехай задано функцію доходу, що залежить від обсягу виробництва $TR(Q)$. Тоді граничний (маргинальний) доход знаходиться як похідна функції $MC = \dfrac{dTR}{dQ} = TR'(Q).$

Модель визначення макимуму прибутку. Нехай задано функцію витрат, що залежить від обягу виробництва $TC(Q)$, та залежніть між кількістю продукції та ціною $P(Q)$. Тоді оптимальний для підприємства обсяг випуску продукції, що відповідає максимуму прибутку, знаходиться за допомогою дослідження функції $PR(Q) = TR(Q) – TC(Q)$ на максимум, де $TR(Q) = P(Q)*Q$.

Модель динаміки росту прибутку залежно від інвестицій. Нехай задано модель динаміки росту прибутку залежно від інвестицій $P = S + I$, де S – прибуток споживача, I – інвестиції та $P = P(I)$, $S = S(P)$. Тоді мультиплікатор (коефіцієнт, що показує, у скільки разів сума приросту (скорочення) прибутку перевищує початкову суму інвестицій) знаходиться за формулою $\mu = \dfrac{1}{1 - \dfrac{dS}{dP}}$.

Модель еластичності. Нехай задано $Q_d = (p)$ – функцію попиту в залежності від ціни, $Q_s = (p)$ –функцію пропозиції в залежності від ціни. Тоді:

1) еластичність попиту відносно ціни знаходиться за формулою

$$E_p(Q_d) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d'(p);$$

2) рівноважна ціна знаходиться з умови $Q_d = Q_s$;

3) еластичніть пропозиції відносно ціни знаходиться за формулою

$$E_p(Q_s) = \frac{P}{Q_s} \cdot Q_s'(p);$$

4) еластичність доходу $E_p(R) = E_p(pQ) = E_p(p)E_p(Q).$

Приклад 1. Підприємство виготовляє x виробів, роздрібна вартість кожного з них – p, причому $p + 0,1x = 80$, а функція витрат $V(x) = 5000 + 20x$ (у гривнях). Знайти маргінальний прибуток, якщо виготовлено та продано 150 і 400 виробів.

Розв'язання.

У даному випадку функцією доходу буде

$$D(x) = xp = x(80 - 0,1x) = 80x - 0,1x^2.$$

Прибуток від виготовлення та продажу х виробів буде

$$P(x) = D(x) - V(x) = 80x - 0,1x^2 - (5000 + 20x) = 60x - 0,1x^3 - 5000.$$

Знайдемо маргінальний прибуток для довільного x:

$$P'(x) = (60x - 0,1x^3 - 5000)' = 60 - 0,2x.$$

Тому для $x = 150$ та $x = 400$ одержимо

$$P'(150) = 60 - 0,2 \cdot 150 = 30;$$
$$P'(400) = 60 - 0,2 \cdot 400 = -20.$$

Отже, підприємство буде мати збитки розміром 20 гривень за кожний виріб, який буде виготовлено та продано при зростанні кількості виробів.

Приклад 2. Нехай валовий продукт деякої держави змінюється з часом t за формулою

$$\Pi = 100 + t \text{ (мільярдів гривень)},$$

а кількість населення змінюється за законом

$$P = 120 + 2t \text{ (мільйонів)}.$$

Знайти швидкість зміни частини валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина.

Розв'язання.

Позначимо через $y(t)$ частину валового продукту держави, що припадає на кожного громадянина. За умовою цього прикладу

$$y(t) = \frac{\Pi}{P} = \frac{100 + t}{120 + 2t} \text{ (тисяч гривень на одну особу)}.$$

Звідси

$$y'(t) = \frac{(100+t)' \cdot (120+2t) - (100+t) \cdot (120+2t)'}{(120+2t)^2} =$$
$$= \frac{1 \cdot (120+2t) - 2 \cdot (100+t)}{(120+2t)^2} =$$
$$= \frac{120 + 2t - 200 - 2t}{(120+2t)^2} = \frac{-80}{4(60+t)^2} = \frac{-20}{(60+t)^2}.$$

Отже, частина валового продукту кожного громадянина з часом зменшується.

Похідні вищих порядків мають широке застосування в економіці. Якщо $V(x)$ є функція виробничих витрат (витрати на виготовлення x виробів), то $V'(x)$ дає маргінальну вартість, тобто витрати на досить малу частину виготовлення додаткової продукції. Друга похідна $V''(x)$ дає швидкість зміни маргінальної вартості відносно змін кількості випуску продукції.

Приклад 3 (аналіз функції витрат). Для функції витрат

$$V(x) = 0,001x^3 - 0,3x^2 + 40x + 1000$$

маргінальна вартість буде

$$V'(x) = 0,003x^2 - 0,6x + 40,$$

друга похідна має вигляд

$$V''(x) = 0,006x - 0,6 = 0,006(x - 100).$$

Коли x = 150, маємо: $V'(150) = 17,5,\ V''(150) = 0,3.$

Остання рівність означає, що кожна додаткова одиниця виробленої продукції спричиняє зротання на 0,3 маргінальної вартості.

Приклад 4. Витрати виробництва визначені функцією

$$V(x) = 2x^3 - 6x + 7.$$

Знайти її інтервали монотонності.

Розв'язання.

Задана функція існує при $x \in (-\infty, \infty)$, але має економічний зміст лише для x>0.

Знаходимо похідну:

$$V'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1).$$

Тоді

$$6(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Ці значення поділяють вісь Ox на інтервали $(-\infty, -1),\ (-1,1),\ (1, \infty).$ В кожному з цих інтервалів $V'(x)$ має постійний знак.

При $x \in (-\infty, -1)$ $V'(x) > 0,$ при $x \in (-1,1)$ $V'(x) < 0,$ при $x \in (1, \infty)$ Отже, функція $V(x)$ зростає при $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ і спадає в інтервалі $(-1,1).$ З економічної точки зору, ця функція спадає в інтервалі $(0,1)$ і зростає в інтервалі $(1, \infty).$

Приклад 5. Встановити зв'язок між доходами підприємства та еластичністю попиту.

Розв'язання.

Функція доходу підприємства

$$D(x) = x \cdot p,$$

де x – кількість виготовлених та проданих виробів, p – вартість кожного виробу. Маргінальний доход відносно вартості буде

$$\frac{dD(x)}{dp}=\frac{d}{dp}(x\cdot p)=x+p\frac{dx}{dp}=x\left(1+\frac{p}{x}\cdot\frac{dx}{dp}\right)=x(1+\eta).$$

Якщо попит еластичний, то $\eta<-1,$ тому $1+\eta<0$ і $\frac{dD}{dp}<0,$ тобто доход D, який розглядаються як функцію вартості p, спадає.

Якщо попит не еластичний, то $-1<\eta<0,$ тоді $1+\eta>0$ і $\frac{dD}{dp}>0.$ Отже, у цьому випадку доход D зростає.

Якщо попит адекватний вартоті, то $\eta=-1,$ $1+\eta=0$ та $\frac{dD}{dp}=0,$ тобто доход не змінюється.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Функція витрат підприємства має вигляд

$$V(x) = 2000 + 10x - 0{,}1x^2 + 0{,}002x^3 \text{ (тисяч гривень).}$$

Знайти маргінальні витрати при $x = 50$, $x = 100$ та $x = 120$.

2. (Аналіз функцій витрат, доходу та прибутку). Для функції витрат $V(x) = 500 + 20x$ і заданої вартості одиниці продукції $p=100-x$, знайти інтервали, в яких функції витрат, доходу та прибутку зростають та спадають.

3. Задано зв'язок між кількістю виготовлених та проданих виробів x та вартістю кожного виробу p.

Треба:

а) визначити еластичність попиту при $p = 12$. При зростанні вартості на 8,5% знайти наближене значення відсотку зміни попиту.

$$x = 250 - 30p + p^2.$$

б) при $p = 250 - 0{,}5x$ і $0 < x < 250$ показати, що попит на x еластичний і функція доходу спадає, а також показати, що при $250 < x < 500$ функція попиту не еластична і доход підприємства зростає.

Відповіді: 1. $V'(50) = 35$, $V'(100) = 90$, $V'(120) = 120{,}4$. **2.** $V(x)$ зростає для усіх x, доход зростає при $x < 50$ та спадає при $x > 50$; прибуток зростає при $x < 40$ і спадає при $x > 40$. **3.** *а*) $\eta=\frac{-36}{17},-18\%;$ *б*) $\eta=1-\frac{500}{x},$ похідна доходу $D'_p=2x-500.$

Список використаної літератури

1. Красс М. С. Математика в экономике / М. С. Красс. – М. : ФБК-ПРЕСС, 2005. – 472с

2. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Крамер. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2010. – 479 с.

3. Сирл С. Матричная алгебра в экономике / С. Сирл, У. Госман; пер. с англ. и научное редактирование Е.М. Четыркина и Р.М. Энтова. – М. : Статистика, 1974. – 375 с.

4. Синєкоп М. С. Вища та прикладна математика. Ч. 1. Вища математика. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / М. С. Синєкоп, Н. О. Жилюк, М. С. Софронова ; за ред. проф. М. С. Синєкопа. – Х. : ХДУХТ, 2015. – 208 с.

5. Высшая математика : общий курс / под ред. А. И. Яблонского. Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 352 с.

6. Баврин И. И. Общий курс высшей математики / И. И. Баврин, В. Л. Матросов. – М. : Просвещение, 1995. – 462 с.

7. Барковський В.В. Вища математика для економістів: навч. посіб. / В.В. Барковський, Н. В. Барковська. – 5-те вид. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.

8. Ланкастер К. Математическая экономика / К. Ланкастер. – М. : 2002. – 832 с.

9. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. :ЮНИТИ, 2002. – 471 с.

10. Общий курс высшей математики для экономистов / под ред. В.И. Ермакова. –М. : ИНФРА-М, 2007. – 656 с.

11. Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
Тема 1. Елементи математичного моделювання в економіці	4
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ	5
Тема 2. Матриці та визначники	5
Тема 3. Матриці та визначники в економіці	10
Завдання для самостійного розв'язання	13
Тема 4. Системи лінійних рівнянь	15
Тема 5. Економічні задачі, що зводяться до розв'язання систем лінійних рівнянь	19
Завдання для самостійного розв'язання	22
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	24
Тема 6. Вектори. Скалярний, векторний та мішаний добутки	24
Тема 7. Використання векторної алгебри в економіці	27
Завдання для самостійного розв'язання	30
ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ	32
Тема 8. Пряма на площині. Пряма та площина у просторі	32
Тема 9. Використання аналітичної геометрії в економіці	36
Завдання для самостійного розв'язання	39
Тема 10. Криві другого порядку	39
Тема 11. Використання кривих другого порядку в економіці	44
Завдання для самостійного розв'язання	48
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ	49
Тема 12. Вступ до математичного аналізу	49
Тема 13. Зв'язок функції, границі та неперервності функції з економікою	53
Завдання для самостійного розв'язання	56
Тема 14. Похідна і диференціал функції однієї змінної	56
Тема 15. Застосування диференціального числення в економіці	64
Завдання для самостійного розв'язання	67
Список літератури	68
Зміст	69

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

СОФРОНОВА Марина Сергіївна

МАТЕМАТИКА В ЕКОНОМІЦІ

Вища та прикладна математика

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних
та інженерно-технічних дисциплін д-р техн. наук., проф. М.І. Погожих

Технічний редактор В.П. Резнікова

План 2018 р., поз. 95

Підп. до друку 17.12.2018 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об'єм даних 6,2 Мб.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.